Martingalas

Definición 1. *Una* martingala *es una función* $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^+$ *tal que para toda cadena* $\sigma \in 2^{<\omega}$, $2d(\sigma) = d(\sigma 0) + d(\sigma 1)$.

El juego consiste en una secuencia infinita de tiradas de 0's y 1's y antes de cada tirada el jugador hace su apuesta. $d(\lambda)$ representa el dinero con el que el jugador comienza, y $d(\sigma)$ es el dinero que tiene el jugador después de haber salido la secuencia σ, dadas las reglas del casino y la estrategia de apuestas del jugador. En cada apuesta, el jugador sólo puede usar el dinero disponible hasta el momento (no puede pedir prestado).

Ejemplos.

1. Supongamos que las reglas del casino son las siguientes: si sale $b \in \{0,1\}$ el jugador recibe dos veces lo apostado a b y se le quita lo apostado a $1-b$. El jugador apuesta $p \geq 0$ al 0 y $q \geq 0$ al 1. Veamos que esta estrategia de juego es una martingala. Si salió $\sigma 0$, el jugador va a tener $d(\sigma) - (p+q) + 2p$. Si salió $\sigma 1$, el jugador va a tener $d(\sigma) - (p+q) + 2q$. Entonces $d(\sigma 0) + d(\sigma 1) = 2d(\sigma)$.
2. Una generalización de la estrategia anterior es: dado $0 \leq \alpha \leq 1$, el casino paga $(1+\alpha)$ por la apuesta ganadora y $(1-\alpha)$ por la apuesta perdedora. Si el jugador apuesta p al 0 y q al 1, entonces $d(\sigma 0) = d(\sigma) - (p+q) + (1+\alpha)p + (1-\alpha)q = d(\sigma) + \alpha p - \alpha q$ y $d(\sigma 1) = d(\sigma) - (p+q) + (1-\alpha)p + (1+\alpha)q = d(\sigma) - \alpha p + \alpha q$, con lo cual $d(\sigma 0) + d(\sigma 1) = 2d(\sigma)$.
3. Ahora supongamos que las reglas son: dado $0 \leq \alpha \leq 1$, si sale 0, el casino paga $(1+\alpha)$ por el total apostado, y si sale 1 paga $(1-\alpha)$ por el total apostado. El jugador apuesta p al 0 y q al 1 (el total apostado es $p+q$). Entonces $d(\sigma 0) = d(\sigma) - (p+q) + (1+\alpha)(p+q)$ y $d(\sigma 1) = d(\sigma) - (p+q) + (1-\alpha)(p+q)$, luego $d(\sigma 0) + d(\sigma 1) = 2d(\sigma) - 2(p+q) + (1+\alpha-1-\alpha)(p+q) = 2d(\sigma)$.

Definición 2. *Sea d una martingala.*

1. d tiene éxito sobre un real $A \in 2^\omega$ *si* $\limsup_{n\to\infty} d(A\restriction n) = \infty$.

2. d tiene éxito sobre una clase $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ *si d tiene éxito sobre A para todo $A \in \mathcal{A}$.*

3. El conjunto de éxitos *de d es* $S[d] = \{A \in 2^\omega : d$ *tiene éxito sobre* $A\}$.

Ejemplos.

1. Supongamos que el casino dobla la apuesta ganadora y se queda con la perdedora. Si sale la secuencia $A = 0^\omega$, una estrategia es apostar siempre todo al 0. Si arrancamos con \$1, la martingala correspondiente es $d(\sigma) = 2^n$ si $\sigma = 0^n$ y $d(\sigma) = 0$ en otro caso, que verifica $d(\lambda) = 1$, $d(\sigma 0) = 2d(\sigma)$, $d(\sigma 1) = 0$ y por lo tanto $d(\sigma 0) + d(\sigma 1) = 2d(\sigma)$. Veamos que d tiene éxito sobre A:

$$\limsup_{n\to\infty} d(A\restriction n) = \limsup_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

2. Ahora supongamos que queremos una martingala que tenga éxito sobre el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in 2^\omega : A_i = 0, i \text{ par}\}$. Una estrategia posible es apostar todo al 0 en las jugadas pares, y la mitad al 0 y la mitad al 1 en las impares. Si arrancamos con \$1, tenemos $d(\lambda) = 1$ y para $\sigma \in 2^{<\omega}$, $b \in \{0,1\}$,

$$d(\sigma b) = \begin{cases} 2d(\sigma) & \text{si } |\sigma| \text{ es impar y } b = 0 \\ 0 & \text{si } |\sigma| \text{ es impar y } b = 1 \\ d(\sigma) & \text{si } |\sigma| \text{ es par} \end{cases}$$

Veamos que $d(\sigma 0) + d(\sigma 1) = 2d(\sigma)$. Si $|\sigma|$ es par, $d(\sigma 0) = d(\sigma 1) = d(\sigma)$, y si $|\sigma|$ es impar, $d(\sigma 0) = 2d(\sigma)$ y $d(\sigma 1) = 0$, así que en ambos casos se cumple la igualdad.

Ahora veamos que d tiene éxito sobre el conjunto $\mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$. A tiene 0's en sus posiciones pares, por lo tanto $d(A \upharpoonright n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} d(A \upharpoonright n) = \limsup_{n\to\infty,\ n \text{ par}} 2^{n/2} = \infty$$

En este caso, $\mathcal{A} = S[d]$.

Lema 3. *Sea d una martingala. Para toda $v \in 2^{<\omega}$ y para todo conjunto libre de prefijos $X \subseteq \{x \in 2^{<\omega} : v \sqsubseteq x\}$, $2^{-|v|}d(v) \geq \sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x)$.*

Demostración. Alcanza probarlo para conjuntos X finitos (si X es infinito y $2^{-|v|}d(v) < \sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x)$, entonces existe $Y \subseteq X$ finito y libre de prefijos tal que $Y \subseteq \{x \in 2^{<\omega} : v \sqsubseteq x\}$ y $2^{-|v|}d(v) < \sum_{y\in Y} 2^{-|y|}d(y)$). Veamos entonces que el lema se verifica para conjuntos finitos X, por inducción en el cardinal del conjunto, $\parallel X \parallel$.

- Si $\parallel X \parallel = 1$, $X = \{w\}$ con $v \sqsubseteq w$. Veamos que $2^{-|v|}d(v) \geq 2^{-|w|}d(w)$ por inducción en $n = |w| - |v|$. Si $n = 0$, entonces $|v| = |w|$ y como $v \sqsubseteq w$, $v = w$, luego $d(v) = d(w)$ y $2^{-|v|}d(v) \geq 2^{-|w|}d(w)$. Supongamos que se verifica para $n = k$ y consideremos w tal que $|w| - |v| = k + 1$. Sea $w = zb$ con $b \in \{0, 1\}$. Entonces, por definición de martingala, $d(z) \geq 2^{-1}d(w)$ y por H.I., $2^{-|v|}d(v) \geq 2^{-|z|}d(z)$, luego $2^{-|v|}d(v) \geq 2^{-(|z|+1)}d(w) = 2^{-|w|}d(w)$.

- Supongamos que el lema se cumple para X con $\parallel X \parallel = n$. Sea X libre de prefijos con $\parallel X \parallel = n + 1$ y $X \subseteq \{x \in 2^{<\omega} : v \sqsubseteq x\}$. Sea w la cadena de máxima longitud que verifica
$$X \subseteq \{x \in 2^{<\omega} : w \sqsubseteq x\}, \tag{1}$$
y sean $X_0 = \{x \in X : w0 \sqsubseteq x\}$ y $X_1 = \{x \in X : w1 \sqsubseteq x\}$. Notemos que $\parallel X_0 \parallel \leq n$ y $\parallel X_1 \parallel \leq n$ (sino w no es la cadena de longitud máxima que verifica (1)). Entonces:
$$\begin{aligned}
2^{|w|}\sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x) &= \sum_{x\in X} 2^{|w|-|x|}d(x)\\
&= 2^{-1}\sum_{x\in X_0} 2^{|w0|-|x|}d(x) + 2^{-1}\sum_{x\in X_1} 2^{|w1|-|x|}d(x)\\
&= 2^{-1}(2^{|w0|}\sum_{x\in X_0} 2^{-|x|}d(x) + 2^{|w1|}\sum_{x\in X_1} 2^{-|x|}d(x))\\
&\leq_{(\text{H.I.})} 2^{-1}(d(w0) + d(w1)) =_{(\text{def.})} d(w)
\end{aligned}$$
Es decir,
$$2^{-|w|}d(w) \geq \sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x) \tag{2}$$
Además, como v cumple (1) entonces $v \sqsubseteq w$ (w es la de máxima longitud que verifica esta propiedad). Aplicando el caso base,
$$2^{-|v|}d(v) \geq 2^{-|w|}d(w) \tag{3}$$
Luego, de (2) y (3),
$$2^{-|v|}d(v) \geq \sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x)$$

□

Lema 4. *Sea d una martingala y sea $S^k[d] = \{X \in 2^\omega : \exists \sigma \sqsubset X(d(\sigma) \geq k)\}$. Entonces $\mu(S^k[d]) \leq d(\lambda)k^{-1}$.*

Demostración. Notemos que $S^k[d] = \{x2^\omega : x \in 2^{<\omega} \wedge d(x) \geq k\}$. Sea $X \subseteq 2^{<\omega}$ libre de prefijos tal que $X2^\omega \subseteq S^k[d]$ y $\mu(X2^\omega) = \mu(S^k[d])$. Entonces

$$k\mu(S^k[d]) = k\mu(X2^\omega) = k\sum_{x\in X} 2^{-|x|} \leq_{(\text{def. de } S^k[d])} \sum_{x\in X} 2^{-|x|}d(x) \leq_{(\text{Lema 3, } v\,=\,\lambda)} d(\lambda)$$

y por lo tanto, $\mu(S^k[d]) \leq d(\lambda)k^{-1}$. □

Definición 5. *Sea $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$.*

1. $\mathcal{A}$ *es* abierto *si* $\mathcal{A} = X2^\omega$ *con* $X \subseteq 2^{<\omega}$.
2. $\mathcal{A}$ *tiene* medida nula *($\mu(\mathcal{A}) = 0$) si para todo ε existe un conjunto abierto $\mathcal{U} \in 2^\omega$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mu(\mathcal{U}) < \varepsilon$.*

Teorema 6. *Sea $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$. Son equivalentes:*

i. $\mu(\mathcal{A}) = 0$

ii. *existe una martingala que tiene éxito sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración.

i. $\Rightarrow$ *ii.* Como $\mu(\mathcal{A}) = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen conjuntos abiertos $\mathcal{U}_k$ tales que $\mu(\mathcal{U}_k) \leq 2^{-k}$ y $\mathcal{A} \subseteq \cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_k$. Queremos hallar una martingala que tenga éxito sobre $\mathcal{A}$. La idea es primero construir martingalas para cada $\mathcal{U}_k$. Sea $[\sigma] = \{X \in 2^\omega : \sigma \sqsubset X\}$. Se comienza con $d_k(\lambda) = \mu(\mathcal{U}_k)$ y, si ya salió σ, se apuesta a $b \in \{0, 1\}$

$$\frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma b])}{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma])} d_k(\sigma)$$

Es decir, se apuesta todo $d_k(\sigma)$ asignando una proporción al 0 y lo que queda al 1. Se puede ver que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in 2^{<\omega}$, esta estrategia da:

$$d_k(\sigma) = \frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma])}{\mu([\sigma])}$$

Veamos que d_k es una martingala:

$$d_k(\sigma 0) = \frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 0])}{\mu([\sigma 0])} = \frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 0])}{2^{-1}\mu([\sigma])} = 2\frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 0])}{\mu([\sigma])}$$

Análogamente,

$$d_k(\sigma 1) = 2\frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 1])}{\mu([\sigma])}$$

Luego

$$d_k(\sigma 0) + d_k(\sigma 1) = 2\left(\frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 0]) + \mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma 1])}{\mu([\sigma])}\right) = 2\frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma])}{\mu([\sigma])} = 2d_k(\sigma)$$

Definamos ahora $d(\sigma) = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k(\sigma)$. Entonces,

$$d(\sigma) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mu(\mathcal{U}_k \cap [\sigma])}{\mu([\sigma])} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{|\sigma|-k} = 2^{|\sigma|}\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = 2^{|\sigma|+1} < \infty$$

Además, d es una martingala pues las d_k lo son:

$$\begin{aligned} d(\sigma 0) + d(\sigma 1) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k(\sigma 0) + \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k(\sigma 1) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (d_k(\sigma 0) + d_k(\sigma 1)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} 2d_k(\sigma) = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} d_k(\sigma) = 2d(\sigma) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A} \subseteq \cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_k$, entonces si $A \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{U}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada k existe $\sigma \sqsubset A$ tal que $\forall i = 1 \dots k$, $d_i(\sigma) = 1$ (es decir, $\mathcal{U}_i \cap [\sigma] = [\sigma]$). Por lo tanto, $d(\sigma) \geq k$, con lo cual $A \in S[d]$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Sea d una martingala que tiene éxito sobre $\mathcal{A}$. Entonces, por el Lema 4, los conjuntos abiertos $S^k[d]$ cumplen que $\mathcal{A} \subseteq \cap_{k\in\mathbb{N}}S^k[d]$ y su medida es $\mu(S^k[d]) \leq d(\lambda)k^{-1}$. Por lo tanto $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

□

Definición 7. $A \in 2^\omega$ *es* computablemente aleatorio *si no existe una martingala computable que tenga éxito sobre A.*

Sea $compRAND = \{X \in 2^\omega : X \text{ es computablemente aleatorio}\}$ y $ML\text{-}RAND = \{X \in 2^\omega : X \text{ es Martin-Löf aleatorio}\}$.

Teorema 8. *$ML\text{-}RAND \subseteq compRAND$.*

Demostración. Supongamos que $A \in compRAND^C$ y veamos que $A \in ML\text{-}RAND^C$. Sea d una martingala computable que tiene éxito sobre A. Por el Lema 4, sabemos que los conjuntos abiertos $S^k[d] \subseteq 2^\omega$ tienen medida $\leq d(\lambda)k^{-1}$. Como d tiene éxito sobre A, $A \in S^k[d]$ para todo k. Además, como d es computable, $S^k[d]$ es r.e. uniformemente en k (es decir, existe una función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2^{<\omega}$ computable total tal que $g(k, i)$ es el i-ésimo elemento de $S^k[d]$). Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función computable total dada por:

$$f(k) = \min\{i : d(\lambda)i^{-1} \leq 2^{-k}\} = \lceil d(\lambda)2^k \rceil$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{U}_k = S^{f(k)}[d]$. Entonces, $h(k, i) = g(f(k), i)$ es una función computable total que da una enumeración recursiva de $(\mathcal{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y para todo k se cumple que $\mu(\mathcal{U}_k) \leq 2^{-k}$ y $A \in \mathcal{U}_k$. Luego, $(\mathcal{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es un test de Martin-Löf que cubre a A y por lo tanto $A \in \text{ML-RAND}^C$. □

Comentario: se puede probar que la inclusión es estricta.

Referencias

[1] S. A. Terwijn. *Complexity and Randomness.* Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (CDMTCS), Research Report 212, 2003.