# Nuevos números normales

**Verónica Becher**

Universidad de Buenos Aires & CONICET

**Charlas en honor a Joos Heintz por sus 70 años**
Técnicas (semi)numéricas en la resolución de sistemas polinomiales
Buenos Aires, lunes 26 de octubre de 2015

## Azar - aléatoire - Zufall - rasgelelik - satunnaisuuden - slumpmässighet - Randomness

En 1909 Émile Borel definió la forma más elemental del azar para números reales, considerando los dígitos de sus expansiones fraccionarias.

## Azar - aléatoire - Zufall - rasgelelik - satunnaisuuden - slumpmässighet - Randomness

En 1909 Émile Borel definió la forma más elemental del azar para números reales, considerando los dígitos de sus expansiones fraccionarias.

Los llamó números normales.

# Números Normales

Una base es un entero mayor o igual que $2$.

Para un número real $x$, la expansión de $x$ en base $b$ es una secuencia $a_1 a_2 a_3 \ldots$ de dígitos del conjunto $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tal que

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

donde $x = \sum_{k \geq 1} a_k b^{-k}$, y no termina con una cola de $b-1$.

# Números normales

Definición (Borel, 1909)

Un número real $x$ is simplemente normal en base $b$ si cada dígito ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b$.

# Números normales

Definición (Borel, 1909)

Un número real $x$ is simplemente normal en base $b$ si cada dígito ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b$.

Un número real $x$ es normal en base $b$ si, para todo entero positivo $k$, cada bloque de $k$ dígitos (comenzando desde cualquier posición) ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b^k$.

# Números normales

Definición (Borel, 1909)

Un número real $x$ is simplemente normal en base $b$ si cada dígito ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b$.

Un número real $x$ es normal en base $b$ si, para todo entero positivo $k$, cada bloque de $k$ dígitos (comenzando desde cualquier posición) ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b^k$.

Equivalentemente, un número real $x$ es normal en base $b$ si, para cada entero positivo $k$, $x$ es simplemente normal en base $b^k$.

# Números normales

Definición (Borel, 1909)

Un número real $x$ is simplemente normal en base $b$ si cada dígito ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b$.

Un número real $x$ es normal en base $b$ si, para todo entero positivo $k$, cada bloque de $k$ dígitos (comenzando desde cualquier posición) ocurre en la expansión de $x$ en base $b$ con frecuencia límite $1/b^k$.

Equivalentemente, un número real $x$ es normal en base $b$ si, para cada entero positivo $k$, $x$ es simplemente normal en base $b^k$.

Un número real $x$ is absolutamente normal si $x$ es normal en toda base.

# No normal

$0{,}01\ 002\ 0003\ 00004\ 000005\ 0000006\ 00000007\ 000000008\ldots$
no es simplemente normal en base $10$.

# No normal

$0{,}01\ 002\ 0003\ 00004\ 000005\ 0000006\ 00000007\ 000000008\ldots$
no es simplemente normal en base $10$.

$0{,}0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ldots$
es simplemente normal en base $10$, pero no en base $100$.

# No normal

$0{,}01\ 002\ 0003\ 00004\ 000005\ 0000006\ 00000007\ 000000008\ldots$
no es simplemente normal en base $10$.

$0{,}0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ldots$
es simplemente normal en base $10$, pero no en base $100$.

Los números en el conjunto ternario Cantor no son simplemente normales en base $3$ (sus expansiones carecen del dígito $1$).

# No normal

$0{,}01\ 002\ 0003\ 00004\ 000005\ 0000006\ 00000007\ 000000008\ldots$
no es simplemente normal en base $10$.

$0{,}0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ldots$
es simplemente normal en base $10$, pero no en base $100$.

Los números en el conjunto ternario Cantor no son simplemente normales en base $3$ (sus expansiones carecen del dígito $1$).

Los números racionales no son normales en ninguna base.

# No normal

$0{,}01\ 002\ 0003\ 00004\ 000005\ 0000006\ 00000007\ 000000008\ldots$
no es simplemente normal en base $10$.

$0{,}0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ \ 0123456789\ldots$
es simplemente normal en base $10$, pero no en base $100$.

Los números en el conjunto ternario Cantor no son simplemente normales en base $3$ (sus expansiones carecen del dígito $1$).

Los números racionales no son normales en ninguna base.

La constante de Liouville $\sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$ no es normal en ninguna base.

# Normal en una base dada

Teorema (Champernowne, 1933)

$0{,}12345678910111213141516171819202 1\ldots$ *es normal en base* $10$.

# Normal en una base dada

Teorema (Champernowne, 1933)

$0{,}12345678910111213141516171819 2021\ldots$ *es normal en base* $10$.

No se sabe si es normal en bases que no son potencias de $10$.

# Normal en una base dada

Teorema (Champernowne, 1933)

$0{,}12345678910111213141516171819202 1\ldots$ *es normal en base* $10$.

No se sabe si es normal en bases que no son potencias de $10$.

squares Besicovitch 1935; primes Copeland and Erdos 1946 de Bruijn words Ugalde, 2000.

# Existencia de números absolutamente normales

Teorema (Borel 1909)

*El conjunto de números absolutamente normales en el intervalo unitario tiene medida de Lebesgue igual a* $1$.

# Existencia de números absolutamente normales

Teorema (Borel 1909)

*El conjunto de números absolutamente normales en el intervalo unitario tiene medida de Lebesgue igual a* $1$.

Problema (Borel 1909)

Dar un ejemplo.

# Existencia de números absolutamente normales

Teorema (Borel 1909)

*El conjunto de números absolutamente normales en el intervalo unitario tiene medida de Lebesgue igual a $1$.*

Problema (Borel 1909)

Dar un ejemplo.

¿Las constantes matemáticas usuales, como $\pi$, $e$, $\sqrt{2}$, son absolutamente normales? O al menos simplemente normales en alguna base?

# Existencia de números absolutamente normales

Teorema (Borel 1909)

*El conjunto de números absolutamente normales en el intervalo unitario tiene medida de Lebesgue igual a* $1$.

Problema (Borel 1909)

Dar un ejemplo.

¿Las constantes matemáticas usuales, como $\pi$, $e$, $\sqrt{2}$, son absolutamente normales? O al menos simplemente normales en alguna base?

Conjetura (Borel 1950)

Los irracionales algebraicos son absolutamente normales.

# Los primeros ejemplos

Bulletin de la Société Mathématique de France (1917) 45:127–132; 132–144

**DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE M. BOREL SUR LES NOMBRES ABSOLUMENT NORMAUX ET DÉTERMINATION EFFECTIVE D'UN TEL NOMBRE;**

PAR M. W. SIERPINSKI.

On appelle, d'après M. Borel, *simplement normal* par rapport à la base $q$ (1) tout nombre réel $x$ dont la partie fractionnaire

(1) E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 197, Paris, 1914.

**SUR CERTAINES DÉMONSTRATIONS D'EXISTENCE;**

PAR M. H. LEBESGUE.

Dans une lettre, adressée à M. Borel, et qui accompagnait l'envoi de l'article précédent, M. Sierpinski se demandait si cet article devait être publié, s'il ne ferait pas double emploi avec une démonstration que j'avais indiquée à M. Borel et que celui-ci a signalée dans la deuxième édition de ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (p. 198).

# ¿Hay números absolutamente normales computables?

Un número real es computable si hay un algoritmo que arroja cada uno de los dìgitos de su expansión fraccionaria en base $2$.

# ¿Hay números absolutamente normales computables?

Un número real es computable si hay un algoritmo que arroja cada uno de los dìgitos de su expansión fraccionaria en base $2$.

Tesis de Licenciatura Departamento de Computación, FCEyN, UBA, 2000
Alumno: Santiago Figueira
Directora: Verónica Becher

# ¿Hay números absolutamente normales computables?

Un número real es computable si hay un algoritmo que arroja cada uno de los dìgitos de su expansión fraccionaria en base $2$.

Tesis de Licenciatura Departamento de Computación, FCEyN, UBA, 2000
Alumno: Santiago Figueira
Directora: Verónica Becher
Jurados: Guillermo Martínez y **Joos Heintz**

# ¿Hay números absolutamente normales computables?

Un número real es computable si hay un algoritmo que arroja cada uno de los dìgitos de su expansión fraccionaria en base $2$.

Tesis de Licenciatura Departamento de Computación, FCEyN, UBA, 2000
Alumno: Santiago Figueira
Directora: Verónica Becher
Jurados: Guillermo Martínez y **Joos Heintz**

**Teorema**

Hay números absolutamente normales computables.

# ¿Hay números absolutamente normales computables?

Un número real es computable si hay un algoritmo que arroja cada uno de los dìgitos de su expansión fraccionaria en base $2$.

Tesis de Licenciatura Departamento de Computación, FCEyN, UBA, 2000
Alumno: Santiago Figueira
Directora: Verónica Becher
Jurados: Guillermo Martínez y **Joos Heintz**

Teorema

Hay números absolutamente normales computables.

Una reformulación recursiva de la construcción de Serpinski de un número absolutamente normal.

Becher, Figuera (2001). Turing (1937?). Becher, Figueira, Picchi (2007). Schmidt (1961/62).

# Las preguntas de Joos, 2000

Dimos un algoritmo para computar un número absolutamente normal de complejidad doblemente exponencial: para computar el $n$-ésimo dígito realiza una cantidad doblemente exponencial en $n$ de operaciones.

# Las preguntas de Joos, 2000

Dimos un algoritmo para computar un número absolutamente normal de complejidad doblemente exponencial: para computar el $n$-ésimo dígito realiza una cantidad doblemente exponencial en $n$ de operaciones.

Pregunta de Joos

*¿Hay un algoritmo polinomial para computar números absolutamente normales?*

# Las preguntas de Joos, 2000

Dimos un algoritmo para computar un número absolutamente normal de complejidad doblemente exponencial: para computar el $n$-ésimo dígito realiza una cantidad doblemente exponencial en $n$ de operaciones.

### Pregunta de Joos

*¿Hay un algoritmo polinomial para computar números absolutamente normales?*

### Pregunta de Joos

*¿Hay una definición por medio de una fórmua cerrada, o por medio de una recurrencia?*

# Las preguntas de Joos, 2000

Dimos un algoritmo para computar un número absolutamente normal de complejidad doblemente exponencial: para computar el $n$-ésimo dígito realiza una cantidad doblemente exponencial en $n$ de operaciones.

Pregunta de Joos

*¿Hay un algoritmo polinomial para computar números absolutamente normales?*

Pregunta de Joos

*¿Hay una definición por medio de una fórmua cerrada, o por medio de una recurrencia?*

# 12 años después, el palabras de Joos "Hackeamos el algoritmo de Turing"

Teorema (Becher, Heiber and Slaman, 2013)

*Hay un algoritmo que computa un número absolutamente normal con complejidad apenas arriba de cuadrática.*

# 12 años después, el palabras de Joos “Hackeamos el algoritmo de Turing”

Teorema (Becher, Heiber and Slaman, 2013)

*Hay un algoritmo que computa un número absolutamente normal con complejidad apenas arriba de cuadrática.*

Precisamente,

# 12 años después, el palabras de Joos "Hackeamos el algoritmo de Turing"

Teorema (Becher, Heiber and Slaman, 2013)

*Hay un algoritmo que computa un número absolutamente normal con complejidad apenas arriba de cuadrática.*

Precisamente,

Para cualquier función $f$ computable no decreciente y no acotada, hay un algoritmo que arroja los primeros $n$ dígitos de la expansión en base $2$ de un número absolutamente normal, despés de hacer $O\big(f(n)n^2\big)$ operaciones elementales.

# 12 años después, el palabras de Joos "Hackeamos el algoritmo de Turing"

Teorema (Becher, Heiber and Slaman, 2013)

*Hay un algoritmo que computa un número absolutamente normal con complejidad apenas arriba de cuadrática.*

Precisamente,

Para cualquier función $f$ computable no decreciente y no acotada, hay un algoritmo que arroja los primeros $n$ dígitos de la expansión en base $2$ de un número absolutamente normal, despés de hacer $O\big(f(n)n^2\big)$ operaciones elementales.

Programado por Martin Epszteyn, 2013.

$0{,}4031290542003809132371428380827059102765116777624189775110896366\ldots$

# 12 años después, el palabras de Joos “Hackeamos el algoritmo de Turing”

Teorema (Becher, Heiber and Slaman, 2013)

*Hay un algoritmo que computa un número absolutamente normal con complejidad apenas arriba de cuadrática.*

Precisamente,

Para cualquier función $f$ computable no decreciente y no acotada, hay un algoritmo que arroja los primeros $n$ dígitos de la expansión en base $2$ de un número absolutamente normal, despés de hacer $O\big(f(n)n^2\big)$ operaciones elementales.

Programado por Martin Epszteyn, 2013.

$0{,}4031290542003809132371428380827059102765116777624189775110896366\ldots$

Figueira and Nies (2013) y Lutz and Mayordomo (2013) dieron otros algoritmos para computar un número absolutamente normal number en tempo polynomial, ambos basado en martingalas.

# Pregunta abierta (2013), al estilo Joos

Nuestro algoritmo para obtener un número absolutamente normal consigue velocidad de cómputo a costa de la velocidad de convergencia a normalidad.

# Pregunta abierta (2013), al estilo Joos

Nuestro algoritmo para obtener un número absolutamente normal consigue velocidad de cómputo a costa de la velocidad de convergencia a normalidad.

¿Hay un número absolutamente normal computable en tiempo polinomial que tenga convergencia a normalidad optima?

# Normalidad como distribución uniforme

Teorema (Wall 1949)

*Un número real* $x$ *es normal en base* $b$ *si y solo si* $(b^k x)_{k\geq 0}$ *está uniformemente distribuido módulo* $1$ *para la medida de Lebesgue.*

# Normalidad como distribución uniforme

Teorema (Wall 1949)

*Un número real $x$ es normal en base $b$ si y solo si $(b^k x)_{k\geq 0}$ está uniformemente distribuido módulo $1$ para la medida de Lebesgue.*

Creencia al estilo Joos

*Si consideramos medidas apropiadas casi todos los elementos de conjuntos bien estructurados son absolutamente normales, salvo obstáculos evidentes.*

# Normalidad como distribución uniforme

Teorema (Wall 1949)

*Un número real* $x$ *es normal en base* $b$ *si y solo si* $(b^k x)_{k \geq 0}$ *está uniformemente distribuido módulo* $1$ *para la medida de Lebesgue.*

Creencia al estilo Joos

*Si consideramos medidas apropiadas casi todos los elementos de conjuntos bien estructurados son absolutamente normales, salvo obstáculos evidentes.*

Teorema (Cassels, 1959)

*En el conjunto ternario de Cantor casi todos, respecto de la medida uniforme, los número reales son normales en toda base que no es una potencia de* $3$.

# Medidas apropiadas para normalidad

Lema (aplicación directa de Teorema Davenport, Erdős, LeVeque 1963)

*Si $\mu$ es una medida tal que su transformada de Fourier cae en el infinito suficientemente rápido, entonces casi todos los elementos respecto de $\mu$ son absolutamente normales.*

Hochman y Shmerkin (2015) dieron una condición geométrica-fractal para que una medida sobre el intervalo unitario esté soportada en elements normales en una base dada. Este conjunto soporte debe tener medida de Lebesgue $1$.

# Normalidad y aproximaciones Diofánticas

Teorema (Bugeaud 2002)

*Hay un número de Liouville absolutamente normal.*

# Normalidad y aproximaciones Diofánticas

Teorema (Bugeaud 2002)

*Hay un número de Liouville absolutamente normal.*

Teorema (Becher, Heiber and Slaman 2015)

*Hay un número de Liouville computable absolutamente normal.*

# Normalidad y aproximaciones Diofánticas

Teorema (Bugeaud 2002)

*Hay un número de Liouville absolutamente normal.*

Teorema (Becher, Heiber and Slaman 2015)

*Hay un número de Liouville computable absolutamente normal.*

Teorema (Becher, Bugeaud and Slaman 2015)

*Para cada número real $a$ mayor o igual que $2$ hay un número absolutamente normal computable en $a$, con exponente de irracionalidad $a$.*

# Línea de investigación

Se sabe poco de la relación entre propiedades combinatorias, propiedades computacionales, y propiedades de la teoría de números para las expansiones fraccionarias de los números reales. Mis investigaciones sobre números normales apuntan a saber más sobre este problema.

# Línea de investigación

Se sabe poco de la relación entre propiedades combinatorias, propiedades computacionales, y propiedades de la teoría de números para las expansiones fraccionarias de los números reales. Mis investigaciones sobre números normales apuntan a saber más sobre este problema.

La principal técnica de trabajo es la reformulación de conceptos de teoría de números en términos computacionales, usando aproximaciones finitas.

# Línea de investigación

Se sabe poco de la relación entre propiedades combinatorias, propiedades computacionales, y propiedades de la teoría de números para las expansiones fraccionarias de los números reales. Mis investigaciones sobre números normales apuntan a saber más sobre este problema.

La principal técnica de trabajo es la reformulación de conceptos de teoría de números en términos computacionales, usando aproximaciones finitas.

Temas:
Normalidad y autómatas
Normalidad y aproximaciones diofánticas
Algoritmos para construir números (simplemente) normales

# Línea de investigación

Se sabe poco de la relación entre propiedades combinatorias, propiedades computacionales, y propiedades de la teoría de números para las expansiones fraccionarias de los números reales. Mis investigaciones sobre números normales apuntan a saber más sobre este problema.

La principal técnica de trabajo es la reformulación de conceptos de teoría de números en términos computacionales, usando aproximaciones finitas.

Temas:
Normalidad y autómatas
Normalidad y aproximaciones diofánticas
Algoritmos para construir números (simplemente) normales

| | | |
|---|---|---|
| Trabajo conjunto con | Ted Slaman | (University of California Berkeley) |
| and partly with | Yann Bugeaud | (Université Strasbourg) |
| | Pablo Ariel Heiber | (Universidad de Buenos Aires). |
| | Olivier Carton | (Université Paris Diderot |
| | Nicolás Alvarez | (Universidad del Sur) |

## ¡Feliz cumpleaños Joos!

Verónica Becher, Yann Bugeaud, Theodore Slaman. On simply normal numbers to different bases, Matematische Annalen, in press 2015.

Verónica Becher, Pablo Ariel Heiber, Theodore A. Slaman. A computable absolutely normal Liouville number. *Mathematics of Computation*, 232:1–9, 2015.

Verónica Becher, Theodore Slaman. On the normality of numbers to different bases. *Journal of the London Mathematical Society*, 90 (2): 472-494, 2014.

Verónica Becher, Yann Bugeaud, Theodore Slaman. Normal numbers and Diophantine approximations, in progress, 2015.

Verónica Becher, Yann Bugeaud, Theodore Slaman. The irrationality exponents and computable numbers, in Proceedings of American Mathematical Society, in press 2015.

Verónica Becher, Pablo Ariel Heiber, Theodore A. Slaman. Normal numbers and the Borel hierarchy, *Fundamenta Mathematicae* 226: 63-77, 2014.

Verónica Becher, Pablo Ariel Heiber, Theodore Slaman. A polynomial-time algorithm for computing absolutely normal numbers. *Information and Computation*, 232:1–9, 2013.

Verónica Becher. Turing's Note on Normal Numbers. In: *Alan Turing - His Work and Impact*. Ed. by S Barry Cooper and Jan van Leeuwen. Elsevier Science, 408–411, 2012.

Verónica Becher. Turing's Normal Numbers: Towards Randomness. In: How the world com- putes - Turing Centenary Conference CiE 2012. Ed. by S.B. Cooper, A. Dawar, and B. Löwe. *Lecture Notes in Computer Science* 7318, 35–45 . Cambridge UK, 2012, .

Verónica Becher and Pablo Ariel Heiber. On extending de Bruijn sequences. In: *Information Processing Letters* 111.18, , 930–932, 2011.

Verónica Becher, Santiago Figueira and Rafael Picchi. Turing's unpublished algorithm for normal numbers, *Theoretical Computer Science* 377: 126–138, 2007.

Verónica Becher and Santiago Figueira. An example of a computable absolutely normal number, *Theoretical Computer Science* 270: 947–958, 2002.

Nicolás Alvarez, Verónica Becher. Levin's construction of absolutely normal numbers, submitted 2015.

- Émile Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Supplemento di Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 27:247–271, 1909.
- Émile Borel. Sur les chiffres décimaux $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 230:591–593, 1950.
- Yann Bugeaud. Nombres de Liouville et nombres normaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 335(2):117–120, 2002.
- Yann Bugeaud. *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*. Number 193 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012.
- Champernowne, D. The Construction of Decimals in the Scale of Ten. *Journal of the London Mathematical Society*, 8:254-260, 1933.
- L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Dover, 2006.
- Lebesgue, H. 1917. Sur certaines démonstrations d'existence. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45:132–144.
- W. M. Schmidt, On normal numbers. *Pacific Journal of Mathematics*. 10 661-672, 1960.
- W.M.Schmidt. Uber die Normalitat von Zahlen zu verschiedenen Basen. *Acta Arithmetica* 7: 299–309, 961/62.
- Sierpiński, W. Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45:127–132, 1917.
- Turing, A. M. A Note on Normal Numbers. *Collected Works of Alan M. Turing, Pure Mathematics*, edited by J. L. Britton, 117-119. Notes of editor, 263–265. North Holland, 1992. Reprinted in *Alan Turing - his work and impact*, S B. Cooper and J. van Leeuwen editors, Elsevier, 2012.