Tesis de Licenciatura

Un ejemplo de un número computable absolutamente normal

Santiago Figueira

Dirección: Dra. Verónca Becher

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

22 de noviembre de 2000

1. Introducción

Un número real se dice *normal* en base q si para todo natural $n \geq 1$, toda secuencia de n dígitos aparece en el desarrollo fraccionario del número escrito en la base q con probabilidad q^{-n}. Por ejemplo, si un número es normal en la base 2 entonces la probabilidad de encontrar la cadena "0" y la cadena "1" en su desarrollo fraccionario será 2^{-1}, la probabilidad de encontrar las cadenas "00", "01", "10" y "11" será 2^{-2} y así sucesivamente. De esta manera, el número racional

$$0{,}10101010101010101010101010...$$

no es normal en base 2 porque si bien la probabilidad de encontrar un "1" o un "0" es 2^{-1}, no es cierto que la probabilidad de encontrar la cadena "10" sea 2^{-2}. De hecho, en este ejemplo la probabilidad de encontrar tanto la cadena "10" como la cadena "01" es 2^{-1} y la probabilidad de encontrar la cadena "11", así como la cadena "00" es 0. Existen números irracionales que tampoco son normales en cierta base. Por ejemplo el número irracional

$$0{,}1010010001000010000010000001...$$

no es normal en base 2 ya que, por ejemplo, la probabilidad de encontrar la cadena "1" en el desarrollo fraccionario es 0 y la probabilidad de encontrar la cadena "0" es 1. Otro ejemplo es el número de Champernowne

$$0{,}12345678910111213141516171819...$$

que tiene la concatenación de todos los números naturales escritos en base 10. Se puede demostrar que este número es normal en base 10, pero que no es normal en otras bases.

Un número real se dice *absolutamente normal* si es normal en toda base $q \geq 2$. Borel [1] demostró la existencia de números absolutamente normales. Más aún, probó que en el sentido de teoría de la medida, casi todos los números reales son absolutamente normales. Sin embargo, a pesar de que la probabilidad de que un número real sea absolutamente normal es 1, exhibir ejemplos de este tipo de números no ha sido fácil. Notemos que ningún número racional es absolutamente normal: $\frac{a}{b}$ con $a < b$, se escribe en la base b como

$$0.a0000000000000000000000000...$$

El primer ejemplo de número absolutamente normal fue dado por Sierpinski en 1916 [3], cuando el concepto de computabilidad aún no había sido dado. Este último concepto data recién de 1936.

Por otro lado, los ejemplos de números aleatorios son también ejemplos de números absolutamente normales. Esto se debe a que la propiedad de absoluta normalidad es una condición necesaria, aunque no suficiente, de aleatoriedad. Este es el caso del número Ω de Chaitin [2], la probabilidad de detención de una máquina universal. Aunque la definición de Ω es conocida y sabemos que es un número real en el intervalo $(0,1)$, no existe ningún procedimiento computable que nos permita exhibir sus dígitos fraccionarios. Es decir, Ω no es computable.

Recordemos que un número real es *computable* si existe una función computable que calcula cada uno de sus dígitos fraccionarios. Es decir, si existe $f : N \to N$ computable tal que para todo n, $f(n)$ devuelve el n-ésimo dígito fraccionario del número expresado en cierta base.

Las constantes fundamentales como π, $\sqrt{2}$, e y los números algebraicos irracionales son todos computables y se conjetura que son absolutamente normales. Pero no se ha podido probar que sean normales en base 10 y menos aún en todas las bases. Carecemos de un procedimiento computable que decida la absoluta normalidad.

En este trabajo daremos un ejemplo de un número computable y absolutamente normal. Nuestra definición se basa en la lúcida construcción que Sierpinski utilizó para definir su ejemplo de número absolutamente normal [3]. Sin embargo, Sierpinski no contempló cuestiones de finitud y computabilidad: su definición se basa en conjuntos infinitos y utiliza la noción de mínimo de un conjunto no numerable de puntos. Sierpinski define Δ como un conjunto de ciertos intervalos del tipo (a, b) con a y b racionales. Estos intervalos cubren a todos los números que no son normales en alguna base. Aunque el conjunto Δ tiene una cantidad infinita numerable de intervalos, éstos no cubren todo el $(0,1)$. Su demostración prueba que todo número real del intervalo $(0,1)$ que cae fuera de todos los intervalos de Δ es absolutamente normal. En otras palabras, un número real que no quede cubierto por ninguno de los infinitos intervalos pertenecientes a Δ es absolutamente normal.

¿Pero por qué no podemos utilizar el número definido por Sierpinski? En su trabajo, define ξ como el mínimo número real del intervalo $(0,1)$ que no pertenece a ningún intervalo de Δ. Ésta es su determinación efectiva de un número absolutamente normal, pero no queda dicho si ξ es computable o no. Lo que Sierpinski llamó *determinación efectiva* no coincide con la noción actual de computabilidad.

Nuestro trabajo se basa fundamentalmente en este resultado de Sierpinski: definiremos un número real en $(0,1)$ que no pertenezca a ninguno de los intervalos de Δ. Nuestra estrategia será trabajar incrementalmente con los conjuntos elementales de Sierpinski y usar una función de selección computable en vez del mínimo. Definimos una sucesión computable Δ_k de conjuntos de intervalos que converge a Δ. Cada Δ_k está formado por una cantidad finita de intervalos de Δ. Al aumentar k incluimos más intervalos de Δ, pero siempre una cantidad finita de ellos. De esta manera, la medida de cada Δ_k resulta computable. Definiremos el número ν en base 2, determinando cada uno de los dígitos de su expansión binaria,

$$\nu = 0.b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$$

y probaremos que ν no queda cubierto por Δ. A grandes rasgos, el n-ésimo dígito de ν quedará determinado por un sencillo cálculo sobre el conjunto Δ_{p_n} apropiado, donde el índice p_n se obtiene computablemente a partir de n.

Para determinar el primer dígito de ν, dividimos el intervalo $(0,1)$ a la mitad y definimos los intervalos

$$c_0^1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ y } c_1^1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

de medida $\frac{1}{2}$ cada uno. Notar que, pensando en base 2, en c_0^1 existen sólo números cuyo primer dígito fraccionario es 0 y en c_1^1 existen sólo números cuyo primer dígito fraccionario es 1. Sabemos que ni Δ (ni ninguno de los Δ_k) cubren todo el intervalo $(0,1)$. Entonces, el conjunto que queda descubierto por Δ debe caer en c_0^1 o en c_1^1, o en ambos. La idea ahora es calcular un subconjunto de Δ, llamémoslo Δ_{p_1}, suficientemente grande (es decir, suficientemente parecido a Δ) como para asegurar que si Δ_{p_1} no cubre completamente un cierto intervalo entonces Δ tampoco lo hará. Por construcción, sabemos que Δ_{p_1} deja al descubierto un conjunto de medida mayor que cero en el intervalo $(0,1)$. Deducimos que o bien la medida de Δ_{p_1} restringido a c_0^1 es menor que $\frac{1}{2}$ o bien la medida de Δ_{p_1} restringido a c_1^1 es menor que $\frac{1}{2}$ o bien se cumplen ambas a la vez. Por la forma en que elegimos p_1, con solo analizar la medida de Δ_{p_1} restringido a cada uno de los intervalos logramos identificar alguno de los dos intervalos, c_0^1 o c_1^1, que contenga un conjunto de medida mayor que cero no cubierto por Δ_{p_1} y, por lo tanto, no cubierto por Δ. Si el intervalo identificado es c_0^1 entonces existirán números reales externos a todo intervalo de Δ cuyo primer dígito fraccionario es 0 y por lo tanto definimos $b_1 = 0$. Recíprocamente, si el identificado es c_1^1, definimos $b_1 = 1$.

Describamos ahora la determinación del segundo dígito de ν. La idea es la misma que la del paso anterior. Dividimos el intervalo identificado del paso anterior, $c_{b_1}^1$, en dos mitades. Si $b_1 = 0$, dividimos el intervalo c_0^1 en dos y definimos

$$c_0^2 = \left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ y } c_1^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Si $b_1 = 1$, dividimos el intervalo c_1^1 en dos y definimos

$$c_0^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ y } c_1^2 = \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

En cualquier caso, los nuevos intervalos definidos serán de medida $\frac{1}{4}$. Por ejemplo, supongamos que ya hemos definido el primer dígito, $b_1 = 0$. Entonces todos los números reales interiores al intervalo c_0^2 tienen la forma binaria " 0,00...", mientras que todos los interiores al intervalo c_1^2 tienen forma " 0,01... ". Al igual que en el paso anterior, sabemos que es imposible que Δ cubra todo el c_0^2 y todo el c_1^2. Entonces, debe quedar un conjunto de esta porción de la recta real no cubierto por Δ, que debe caer en c_0^2 o en c_1^2 o en ambos a la vez. Nuevamente, determinamos un índice apropiado p_2 y calculamos Δ_{p_2}. Comparando la medida de Δ_{p_2} restringido a c_0^2 con la medida de Δ_{p_2} restringido a c_1^2, identificamos cual de los dos intervalos está menos cubierto por Δ_{p_2}. Si identificamos a c_0^2 entonces existirán números reales no cubiertos por Δ cuyo segundo dígito será 0. En este caso, definimos $b_2 = 0$. Recíprocamente, si identificamos a c_1^2 entonces existirán números reales no cubiertos por Δ cuyo segundo dígito será 1, por lo que definimos $b_2 = 1$.

En general la determinación del n-ésimo dígito de ν dependerá de la definición del dígito anterior. Dividiremos $c_{b_{n-1}}^{n-1}$ a la mitad y definiremos los intervalos c_0^n y c_1^n, de medida $\frac{1}{2^n}$ cada uno. Al menos uno de los dos no estará completamente cubierto por Δ y lograremos seleccionar alguno que satisfaga esa condición. Si seleccionamos el c_0^n, entonces b_n será 0, sino será 1.

Enfaticemos que la definición de cada b_n se basa en la definición de b_{n-1} y en la comparación de la medida del conjunto Δ_{p_n} restringido a los intervalos c_0^n y c_1^n. Debido a que estas magnitudes son computables, habremos obtenido un procedimiento computable que nos permite definir dígito a dígito nuestro número real ν. Aplicando el resultado de Sierpinski, ν será absolutamente normal.

La clave de esta construcción consiste en la definición de los conjuntos finitos Δ_k, en la determinación apropiada de los p_n y en la capacidad de acotar la medida del conjunto $\Delta - \Delta_k$. Esto es lo que permite, en cada paso n, conseguir un conjunto de intervalos Δ_{p_n}, suficientemente grande como para asegurar que si Δ_{p_n} no cubre completamente cierto intervalo entonces Δ tampoco.

2. Resultado de Sierpinski de 1916

Utilizaremos la noción clásica de medida. La medida del intervalo $I = (a, b)$, con $a < b$ será notada como $\mu(I)$, y su valor será la longitud del segmento (a, b), o sea $b - a$. Usaremos también la noción de medida de un conjunto de intervalos J, notado como $\mu(J)$. Intuitivamente, la medida de J es la suma de las longitudes de los segmentos cubiertos por J. Por ejemplo, la medida del conjunto $J = \{(0, 2), (1, 4), (6, 9)\}$ es 7 pues los dos primeros intervalos cubren al $(0, 4)$, de medida 4 y el tercer intervalo cubre el $(6, 9)$, de medida 3.

Veamos ahora en detalle cual es la construcción dada por Sierpinski en su demostración [3]. En primer lugar, define $\Delta_{q,m,n,p}$ como el conjunto de todos los intervalos de la forma

$$\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}, \frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right)$$

tales que

$$\left|\frac{c_p(b_1, b_2, ..., b_n)}{n} - \frac{1}{q}\right| \geq \frac{1}{m}$$

en dónde $0 \leq b_i \leq q - 1$ para $1 \leq i \leq n$ y dónde $c_p(b_1, b_2, ..., b_n)$ representa la cantidad de veces que figura p entre los números $b_1, b_2, ..., b_n$. Por ejemplo si tomamos a $q = 2$, $m = 2$, $n = 2$ y $p = 0$, entonces resulta

$$\begin{aligned}
\Delta_{q,m,n,p} &= \left\{\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{4} - \frac{1}{4}, \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{2}{4}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right)\right\} = \\
&= \left\{\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}
\end{aligned}$$

porque de las cuatro combinaciones posibles de b_1 y b_2, las únicas que satisfacen

$$\left|\frac{c_p(b_1,\ b_2)}{n} - \frac{1}{q}\right| \geq \frac{1}{m}$$

son "00" y "11". En efecto, la condición anterior sólo se verifica si $c_p(b_1, b_2) = 2$ o si $c_p(b_1, b_2) = 0$.

Notar que la medida de cualquier intervalo perteneciente a $\Delta_{q,m,n,p}$ es igual a $\frac{3}{q^n}$. Este hecho es usado fuertemente en la demostración de Sierpinski.

Sierpinski define el conjunto de intervalos $\Delta(\varepsilon)$ como una unión de infinitos $\Delta_{q,m,n,p}$. Este conjunto depende de ε, un número del intervalo $(0, 1]$ que servirá para acotar la medida de $\Delta(\varepsilon)$. El conjunto $\Delta(\varepsilon)$ se define de la siguiente manera:

$$\Delta(\varepsilon) = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p}$$

en dónde $n_{m,q}(\varepsilon)$ será un número suficientemente grande como para que $\mu(\Delta(\varepsilon)) < \varepsilon$:

$$n_{m,q}(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{24m^6q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 2.$$

Como ε aparece en el denominador, cuanto menor se quiera hacer $\mu(\Delta(\varepsilon))$, más grande deberá ser $n_{m,q}(\varepsilon)$. Observemos que aunque la medida de $\Delta(\varepsilon)$ es inferior a ε, ningún intervalo $J = (c, d)$ con $c < d$, incluido en el $(0, 1)$ puede quedar descubierto por $\Delta(\varepsilon)$. En efecto, si esto ocurriera, entonces habría infinitos racionales pertenecientes a J que caerían fuera de todo intervalo de $\Delta(\varepsilon)$. Luego, no debemos pensar a $\Delta(\varepsilon)$ como un conjunto que deja al descubierto intervalos del tipo J dentro del $(0, 1)$. Más bien debemos pensarlo como un conjunto que deja sin cubrir una cantidad infinita no numerable de puntos irracionales y aislados.

Notemos que tanto el 0 como el 1 quedan cubiertos por $\Delta(\varepsilon)$. En efecto, tomemos $q = 2$, $m = 2$ y $n = n_{m,q}(\varepsilon)$. Si $p = 0$ y $b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces el 0 queda cubierto por el intervalo $\left(\frac{-1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, que pertenece a $\Delta_{q,m,n,p}$. De la misma manera, si $p = 1$ y $b_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces el 1 queda cubierto por el intervalo $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 + \frac{1}{2^n}\right)$, que pertenece a $\Delta_{q,m,n,p}$.

Para acotar la medida de $\Delta(\varepsilon)$, Sierpinski trabaja con la suma de las medidas de cada uno de los intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$ que aparecen en $\Delta(\varepsilon)$:

$$s(\varepsilon) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I \in \Delta_{q,m,n,p}} \mu(I)$$

y prueba que $s(\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0, 1]$.

Sierpinski define $E(\varepsilon)$ como el conjunto de todos los reales del intervalo $(0, 1)$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos contenidos en $\Delta(\varepsilon)$. Prueba que para todo $\varepsilon \in (0, 1]$, todo real perteneciente a $E(\varepsilon)$ es absolutamente normal. Notar que como $s(\varepsilon)$ es una cota superior de $\mu(\Delta(\varepsilon))$, lo que se está probando es que $\mu(\Delta(\varepsilon))$ se puede hacer tan chica como se quiera. Pero entonces la medida de $E(\varepsilon)$ (que obviamente es mayor que $1 - \varepsilon$) se puede hacer tan cercana a 1 como se quiera. Esto quiere decir que la probabilidad de que un número perteneciente al intervalo $(0, 1)$ sea absolutamente normal es 1.

Para terminar con su demostración, Sierpinski define ξ como el mínimo número real perteneciente a $E(1)$ y sostiene que de esta forma ha determinado efectivamente un número absolutamente normal.

3. Un algoritmo para un número absolutamente normal

Nuestra construcción se basa en una observación esencial: el conjunto $\Delta(\varepsilon)$ es recursivamente enumerable. Trabajamos con los mismos conjuntos de intervalos definidos por Sierpinski pero, para simplificar la notación, dejamos fijo un $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ computable y renombramos:

$$\Delta = \Delta(\varepsilon)\,;\ s = s(\varepsilon)\,;\ n_{m,q} = n_{m,q}(\varepsilon)\,.$$

Definimos la sucesión computable Δ_k:

$$\Delta_k = \bigcup_{q=2}^{k+1} \bigcup_{m=1}^{k} \bigcup_{n=n_{m,q}}^{k \cdot n_{m,q}} \bigcup_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p}.$$

Definimos también las correspondientes cotas de la medida de cada término de la sucesión:

$$s_k = \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=n_{m,q}}^{k \cdot n_{m,q}} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I \in \Delta_{q,m,n,p}} \mu(I)\,.$$

Al aumentar k, Δ_k incluye más conjuntos $\Delta_{q,m,n,p}$ y s_k adiciona la medida de más intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$. Es evidente que $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ y que $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \Delta$. Como s_k suma las medidas de todos los intervalos que aparecen en Δ_k, resulta $\mu(\Delta_k) \leq s_k$, e idénticamente resulta $\mu(\Delta) \leq s$. Además, se cumple que $s_k \leq s$ para todo natural k. Observemos por último que para todo par de naturales k y l tal que $k \leq l$ se verifica que $\Delta_k \subseteq \Delta_l$ y además cualquiera sea k se cumple que $\Delta_k \subseteq \Delta$.

Por último, definimos el error de aproximar a s por s_k:

$$r_k = s - s_k.$$

Logramos conseguir una cota para r_k. Este resultado es crucial para nuestra construcción computable.

Teorema 1 *Sea k un número natural cualquiera, se cumple $r_k < \frac{5\varepsilon}{2k}$*

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$S_{q,m,n} = \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I \in \Delta_{q,m,n,p}} \mu(I)\,.$$

Veamos primero cual es la forma de r_k. Separando las sumatorias de la definición de s obtenemos

$$\begin{aligned} s \quad = \quad & \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=n_{m,q}}^{k \cdot n_{m,q}} S_{q,m,n} + \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=k \cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} + \\ & + \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} + \sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pero el primer término de (1) es justamente s_k y por la definición de r_k resulta

$$r_k = \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=k \cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} + \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} + \sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n}. \tag{2}$$

Veamos ahora cómo acotar cada uno de los tres términos que aparecen en la ecuación (2). De la demostración de Sierpinski [3] sabemos que

$$S_{q,m,n} < \frac{12m^4}{n^2}.$$

El tercer término de la ecuación (2) se puede acotar como

$$\sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} < 12 \sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^4 \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \tag{3}$$

Para cualquier natural $i \geq 1$ se verifica

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{i} \tag{4}$$

y por la definición de $n_{m,q}$ resulta

$$n_{m,q} - 1 = \left\lfloor \frac{24m^6 q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{24m^6 q^2}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Por (4) y (5) resulta

$$\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{24m^6 q^2}. \tag{6}$$

De (3) y (6) tenemos

$$\sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} < \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{q=k+2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) < \frac{\varepsilon}{k+1} < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{7}$$

De la misma manera, el segundo término de la ecuación (2) se puede acotar como

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \right) \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2k}. \end{aligned} \tag{8}$$

El primer término de la ecuación (2) se puede acotar como

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} \\ &< 12 \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^4 \sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Pero por la definición de $n_{m,q}$ tenemos que

$$k n_{m,q} = k \left(\left\lfloor \frac{24m^6 q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 2 \right) > \frac{24km^6 q^2}{\varepsilon}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{kn_{m,q}} < \frac{\varepsilon}{24km^6q^2}. \tag{10}$$

Aplicando (4) en (9) y teniendo en cuenta la cota encontrada en (10), obtenemos la desigualdad

$$\sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} < \frac{\varepsilon}{2k}\left(\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right) < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{11}$$

Finalmente, reemplazando en (2) las cotas encontradas en (7),(8) y (11) resulta

$$r_k < \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{k} = \frac{5\varepsilon}{2k}.$$

QED

La cota hallada en el Teorema 1 nos permite afirmar lo siguiente:

Observación 2 *El número real s es computable.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos la secuencia de racionales en base 2 $a_n = s_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}}$. Por el Teorema 1 tenemos que

$$|s - a_n| = s - s_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}} = r_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}} < 2^{-n}.$$

Esto quiere decir que es posible aproximar a s por medio de una secuencia computable de racionales a_n tal que los primeros n dígitos de a_n coinciden con los primeros n dígitos de s. Por lo tanto, s es computable. QED

La siguiente proposición nos da una cota de la medida de los conjuntos que no han sido enumerados en el paso k.

Proposición 3 *Para cualquier k natural se verifica*

$$\mu(\Delta - \Delta_k) \leq r_k.$$

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos, Δ_k está incluido en Δ. Entonces, $\Delta - \Delta_k$ será un conjunto de intervalos cuya medida será menor o igual que la suma de las medidas de aquellos intervalos que pertenezcan a Δ y que no pertenezcan a Δ_k. Por lo tanto tenemos

$$\mu(\Delta - \Delta_k) \leq \sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}} \mu(I). \tag{12}$$

Por otro lado, la suma de los intervalos que pertenecen a $\Delta_{q,m,n,p}$ y a la vez no pertenecen a Δ_k se puede calcular como la suma de todos los intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$ menos la suma de aquellos que además pertenezcan a Δ_k:

$$\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}} \mu(I) = \sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}} \mu(I) - \sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}} \mu(I). \tag{13}$$

De (12) y (13) obtenemos

$$\mu\left(\Delta-\Delta_k\right)\leq s-\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right).$$

Pero

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right) &\geq \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)=\\ &= \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}}\mu\left(I\right)=s_k\end{aligned}$$

y por lo tanto deducimos que

$$\mu\left(\Delta-\Delta_k\right)\leq s-s_k=r_k.$$

QED

También podemos acotar la medida de la diferencia entre dos conjuntos enumerados en distintos pasos.

Proposición 4 *Para cualquier k y l naturales tales que $k\leq l$ se verifica*

$$\mu\left(\Delta_l-\Delta_k\right)\leq r_k-r_l.$$

Demostración. Siguiendo la misma idea de la Proposición 3 vemos que

$$\mu\left(\Delta_l-\Delta_k\right)\leq\sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}}\mu\left(I\right)=s_l-\sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)$$

y que por ser $k\leq l$

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right) &\geq \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)=\\ &= \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}}\mu\left(I\right)=s_k.\end{aligned}$$

Así, deducimos que

$$\mu\left(\Delta_l-\Delta_k\right)\leq s_l-s_k=s-s_k-\left(s-s_l\right)=r_k-r_l.$$

QED

En numerosas ocasiones utilizaremos la noción de conjuntos restringidos. Si c es un intervalo y J es un conjunto de intervalos, notaremos como $J \cap c$ al conjunto J restringido a c, es decir, a los reales que caen dentro de algún intervalo de J que también caen dentro de c. Por ejemplo, si definimos $c = (0, 7)$ y consideramos el conjunto de intervalos $J = \{(0, 2), (1, 4), (6, 9)\}$, resulta $J \cap c = \{(0, 4), (6, 7)\}$. Esto se debe a que c cubre todo el $(0, 4)$ definido por los intervalos $(0, 2)$ y $(1, 4)$, pero cubre solo el $(6, 7)$ del intervalo $(6, 9)$. En este caso, resulta $\mu (J \cap c) = 5$.

Lema 5 *Sea c un intervalo cualquiera y sea k un natural. Se cumple*

$$\mu (\Delta \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + r_k.$$

Demostración. En primer lugar, veamos que

$$\Delta = \Delta_k \cup (\Delta - \Delta_k)$$

pues $\Delta_k \subseteq \Delta$ para cualquier k natural. Luego

$$\Delta \cap c = (\Delta_k \cup (\Delta - \Delta_k)) \cap c = (\Delta_k \cap c) \cup ((\Delta - \Delta_k) \cap c)$$

y por lo tanto

$$\Delta \cap c \subseteq (\Delta_k \cap c) \cup (\Delta - \Delta_k).$$

Tomando medida obtenemos

$$\mu (\Delta \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + \mu (\Delta - \Delta_k).$$

Pero por la Proposición 3 tenemos que

$$\mu (\Delta \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + r_k.$$

QED

Lema 6 *Sea un c intervalo cualquiera y sean k y l naturales tales que $k \leq l$. Se cumple*

$$\mu (\Delta_l \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + r_k - r_l.$$

Demostración. Como $k \leq l$ resulta $\Delta_k \subseteq \Delta_l$ y entonces

$$\Delta_l = \Delta_k \cup (\Delta_l - \Delta_k).$$

Luego

$$\Delta_l \cap c = (\Delta_k \cup (\Delta_l - \Delta_k)) \cap c = (\Delta_k \cap c) \cup ((\Delta_l - \Delta_k) \cap c)$$

y por lo tanto

$$\Delta_l \cap c \subseteq (\Delta_k \cap c) \cup (\Delta_l - \Delta_k).$$

Tomando medida obtenemos

$$\mu (\Delta_l \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + \mu (\Delta_l - \Delta_k)$$

y de la Proposición 4 deducimos

$$\mu (\Delta_l \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + r_k - r_l.$$

QED

Lema 7 *$\mu(\Delta_k)$ es computable para cualquier k, y $\mu(\Delta_k \cap c)$ es computable para cualquier k y para cualquier intervalo $c = (a, b)$ con a y b racionales.*

DEMOSTRACIÓN. Δ_k es un conjunto finito de intervalos conocidos con extremos racionales. Se puede probar fácilmente que existe un algoritmo que calcula la medida de Δ_k y la medida de $\Delta_k \cap c$. QED

Ahora sí podemos presentar nuestra construcción para determinar dígito a dígito el número en binario:

$$\nu = 0.b_1\, b_2\, b_3 \ldots.$$

3.1. Determinación del primer dígito

Veamos cómo se puede calcular b_1. Dividamos el intervalo $(0, 1)$ en dos intervalos c_0^1 y c_1^1 de medida $\frac{1}{2}$ cada uno, dónde

$$c_0^1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ y } c_1^1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Sea $p_1 = 5$. Por el Teorema 1 obtenemos

$$r_{p_1} < \frac{5\varepsilon}{2p_1} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

Como c_0^1 y c_1^1 son disjuntos es evidente que

$$\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_1}\right) \leq s_{p_1}. \tag{15}$$

Sumando $r_{p_1} + r_{p_1}$ en ambos lados de la desigualdad (15) y de la definición de r_{p_1} resulta

$$\left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1}\right) + \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}\right) \leq s_{p_1} + r_{p_1} + r_{p_1} = s + r_{p_1} < \varepsilon + r_{p_1}. \tag{16}$$

Ahora bien, es imposible que ambos términos $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1}$ y $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}$ de la ecuación (16) sean mayores o iguales que $\frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2}$, porque de ser así, tendríamos el siguiente absurdo:

$$\varepsilon + r_{p_1} = \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} + \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} \leq \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1}\right) + \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}\right) < \varepsilon + r_{p_1}.$$

Entonces al menos uno de los términos $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_i^1\right) + r_{p_1}$ debe ser menor que $\frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2}$. Es decir, sabemos que la siguiente proposición es verdadera:

$$\left[\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} - r_{p_1}\right] \vee \left[\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} - r_{p_1}\right]$$

Si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) = \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirán las dos condiciones simultáneamente, si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) < \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirá la primera y si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) > \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirá la segunda. De esta manera, definimos b_1 como:

$$b_1 = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

De lo dicho anteriormente y de (14) tenemos que

$$\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c^1_{b_1}\right) + r_{p_1} < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

y aplicando el Lema 5 obtenemos

$$\mu\left(\Delta \cap c^1_{b_1}\right) < \frac{1}{2} = \mu\left(c^1_{b_1}\right).$$

Esto quiere decir que la unión de todos los intervalos pertenecientes a Δ nunca podrá cubrir todo el intervalo $c^1_{b_1}$, cuya medida es justamente $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, seguro existirán números reales que no pertenezcan a ninguno de los intervalos de Δ que estén incluidos en el intervalo $c^1_{b_1}$. Debido a la definición del intervalo $c^1_{b_1}$, todos estos números reales tendrán como primer dígito binario a b_1.

3.2. Determinación del n-ésimo dígito, para $n > 1$

Asumamos que hemos calculado $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ y que en cada paso m $(1 \leq m < n)$ hemos elegido a p_m como

$$p_m = 5 \cdot 2^{2m-2}. \tag{17}$$

Asumamos también que

$$\mu\left(\Delta_{p_{n-1}} \cap c^{n-1}_{b_{n-1}}\right) + r_{p_{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right). \tag{18}$$

Probemos que si elegimos a p_n como $p_n = 5 \cdot 2^{2n-2}$, podemos garantizar que

$$\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c^n_{b_n}\right) + r_{p_n} < \frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right)$$

y que podemos determinar computablemente a b_n.

Dividamos el intervalo $c^{n-1}_{b_{n-1}}$ en dos partes iguales de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada una:

$$c^n_0 = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}, \frac{1}{2^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}\right) \text{ y } c^n_1 = \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}, \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}\right).$$

Notar que estos intervalos escritos en binario no son otra cosa que

$$\begin{aligned} c^n_0 &= (0.b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}\ ,\ 0.b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}\ 1) \text{ y} \\ c^n_1 &= (0.b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}\ 1\ ,\ 0.b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}111111...). \end{aligned}$$

Definamos

$$p_n = 5 \cdot 2^{2n-2}. \tag{19}$$

Al ser c^n_0 y c^n_1 dos intervalos disjuntos que cubren exactamente el intervalo $c^{n-1}_{b_{n-1}}$, resulta

$$\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)=\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_{b_{n-1}}^{n-1}\right).$$

Teniendo en cuenta que $p_n \geq p_{n-1}$ y aplicando el Lema 6 obtenemos

$$\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)\leq\mu\left(\Delta_{p_{n-1}}\cap c_{b_{n-1}}^{n-1}\right)+r_{p_{n-1}}-r_{p_n}. \tag{20}$$

Luego, sumando $r_{p_n}+r_{p_n}$ en ambos lados de la desigualdad (20) tenemos

$$\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+r_{p_n}\right)+\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)+r_{p_n}\right)\leq\mu\left(\Delta_{p_{n-1}}\cap c_{p_{n-1}}^{n-1}\right)+r_{p_{n-1}}+r_{p_n}$$

y por (18) resulta

$$\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+r_{p_n}\right)+\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)+r_{p_n}\right)<\frac{1}{2^{n-1}}\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}\right). \tag{21}$$

Para evitar un absurdo en la desigualdad (21), alguno de los términos $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+r_{p_n}$ o $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)+r_{p_n}$ debe ser menor que $\frac{1}{2^n}\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}\right)$. Esto quiere decir que la siguiente proposición es verdadera:

$$\left[\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)<\frac{\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}}{2^n}-r_{p_n}\right]\vee\left[\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)<\frac{\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}}{2^n}-r_{p_n}\right]$$

Si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)=\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$, se cumplirán las dos condiciones simultáneamente, si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)<\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$ se cumplirá la primera y si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)>\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$, se cumplirá la segunda. Teniendo esto en cuenta, definimos b_n como el primer índice i correspondiente al intervalo c_i^n que esté menos cubierto por Δ_{p_n}, es decir

$$b_n=\begin{cases}0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)\leq\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)\\ 1 \text{ en caso contrario}\end{cases}$$

Por (17), (19) y el Teorema 1 tenemos

$$\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}<\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{j-1}}{2^{2j-1}}=\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{n}2^{-j}<\varepsilon$$

pues la sumatoria $\sum_{j=1}^{n}2^{-j}$ es menor que 1 para todo natural n. De esto último y de la definición de b_n obtenemos

$$\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_{b_n}^n\right)+r_{p_n}<\frac{1}{2^n}\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}\right)<\frac{2\varepsilon}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$$

y aplicando el Lema 5 deducimos

$$\mu\left(\Delta \cap c_{b_n}^n\right) < \frac{1}{2^n} = \mu\left(c_{b_n}^n\right).$$

Esto significa que es imposible que el conjunto Δ cubra todo el intervalo $c_{b_n}^n$. Entonces deben existir números reales del intervalo $c_{b_n}^n$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos de Δ. Así, se puede asegurar que existirá un número exterior a todos los intervalos de Δ cuyo desarrollo en binario comienza como $0.b_1\ b_2\ b_3\ ...\ b_n$. Como esto último se cumple para todo n, deducimos que ν no queda cubierto por ningún intervalo de Δ, y por lo tanto pertenece a $E(\varepsilon)$. Aplicando el resultado de Sierpinski, ν es absolutamente normal.

Además, como los únicos cálculos que se deben tener en cuenta son las medidas de los conjuntos $\Delta_{p_n} \cap c_{b_n}^n$, por el Lema 7 deducimos que nuestra construcción decide computablemente cada uno de los dígitos b_n. Esto prueba que ν es computable. En la sección 5 daremos un algoritmo para computar ν fijando $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es posible que para distintos ε del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ obtengamos distintos números ν, pero todos serán absolutamente normales.

3.3. Acerca del número ξ de Sierpinski

Terminamos esta sección con algunas observaciones acerca de ξ, el número absolutamente normal definido por Sierpinski:

$$\xi = \text{mín}\left\{x \in \Re : x \in (0,1) \wedge (\forall I \in \Delta(1) : x \notin I)\right\}.$$

Como vemos, Sierpinski define ξ fijando $\varepsilon = 1$. En nuestra construcción, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ y por lo tanto no construimos $\Delta(1)$. El número ξ se nos escapa. Sin embargo, la idea del número de Sierpinski se puede generalizar a:

$$\xi = \text{mín}\left\{x \in \Re : x \in (0,1) \wedge (\forall I \in \Delta(\varepsilon) : x \notin I)\right\}$$

y nosotros podríamos modificar nuestra construcción para elegir a ε en el intervalo $(0,1)$ definiendo

$$p_n = \left\lfloor \frac{5 \cdot 2^{2n-2}\varepsilon}{1-\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Si ahora restringimos ε a cualquier real computable del intervalo $(0,1)$, esta última definición de ξ equivale en nuestra construcción a definir cada uno de sus dígitos fraccionarios binarios del siguiente modo:

$$b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_0^n\right) < \frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum\limits_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right) - r_{p_n} \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases} \tag{22}$$

Efectivamente, en cada paso n nos fijamos si ξ cae en c_0^n o en c_1^n y de esta manera logramos definir cada dígito de su desarrollo binario. Supongamos que el número

$$\frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right) - r_{p_n}$$

fuese computable e irracional. Utilizando la definición de b_n dada en (22), podríamos afirmar que ξ es computable. Sin esta hipótesis, podemos afirmar una propiedad más débil: ξ es computable enumerable.

Un número real es *computable enumerable* si existe una secuencia computable no decreciente de racionales que converge a dicho número. Si un número es computable entonces es computable enumerable, pero el recíproco no es cierto. Puede ocurrir que un número real sea aproximable desde abajo por una secuencia no decreciente de racionales pero que no exista una función computable que devuelva uno por uno sus dígitos fraccionarios. Esto último ocurre cuando no es posible acotar el error que cometemos al aproximar el número por la secuencia de racionales.

Veamos como se puede probar que ξ es computable enumerable, para cualquier real computable $\varepsilon \in (0, 1]$. Como Δ contiene una cantidad numerable de intervalos, entonces podemos recorrerlos uno por uno y en cada paso quedarnos con el primer racional del intervalo $[0, 1]$ que esté afuera de todos los intervalos vistos hasta el momento. Este procedimiento es claramente computable y determina una secuencia de racionales no decreciente que converge justamente a ξ. Esto prueba que ξ es computable enumerable. Sin embargo, debido a la forma de los intervalos de Δ, no parece sencillo acotar el error que cometemos al aproximar a ξ de la forma descripta, y por lo tanto no podemos asegurar que este método sea capaz de calcular uno por uno sus dígitos fraccionarios.

4. Otros números computables absolutamente normales

La construcción dada en la sección anterior define ν, un número real expresado en base 2. Siguiendo la misma idea podríamos definir números en otras bases. Para computar un número en base $q \geq 2$, debemos dividir los intervalos en q partes iguales. Así, para determinar el n-ésimo dígito definiremos los intervalos $c_0^n, c_1^n, ..., c_{q-1}^n$ de medida $\frac{1}{q^n}$ cada uno, en dónde

$$c_i^n = \left(\frac{i}{q^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{q^j}, \frac{i+1}{q^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{q^j} \right)$$

para $0 \leq i \leq q-1$. Elegiremos p_n como $p_n = 5 \cdot (q-1) \cdot 2^{2n-2}$ y repitiendo los mismos pasos de la demostración anterior llegaremos a que debe existir un i tal que

$$\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_i^n\right) < \frac{1}{q^n} \left(\varepsilon + (q-1) \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j} \right) - r_{p_n}.$$

Al igual que antes, definimos b_n como el primer índice correspondiente al intervalo menos cubierto por Δ_{p_n}. Es decir, definimos b_n como

$$b_n = \min_{0 \leq i \leq q-1} \left\{ i : \left(\forall j : 0 \leq j \leq q-1 : \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_i^n\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_j^n\right) \right) \right\}.$$

De esta manera, es posible modificar la construcción para computar números en distintas bases. En principio estos números serán distintos entre sí y también serán ejemplos de números computables absolutamente normales.

Veamos ahora como hacer para obtener números absolutamente normales que comiencen con una cadena finita arbitraria de dígitos. Supongamos que queremos computar un número absolutamente normal que comience con los dígitos $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ escritos en alguna base. La forma más sencilla de construir el número consiste en definir al principio la cadena $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ y a continuación computar los dígitos ya conocidos de ν. Obviamente esto último se puede hacer cuando el prefijo está escrito en binario, pero se generaliza para cualquier base q si, en lugar de computar ν, computamos algún número en base q (siguiendo lo explicado más arriba). Este nuevo número será absolutamente normal porque la inclusión de una cantidad finita de dígitos no afecta lo asintótico de la definición de absoluta normalidad. Sin embargo, es posible que este número así definido caiga dentro de algún intervalo de Δ. Esto no es una contradicción, recordemos que Δ deja al descubierto números absolutamente normales pero cubre infinitos otros que también lo son.

Veamos otra forma de construir un número con el prefijo $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ que caiga fuera de Δ. En este caso, la misma construcción probará su absoluta normalidad. Si queremos que nuestro número comience con la cadena binaria $a_1\ a_2\ ...\ a_k$, estamos seguros de que pertenece al intervalo

$$I = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j}, \frac{1}{2^k} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} \right).$$

Entonces podemos comenzar la construcción conocida a partir del intervalo I en lugar del intervalo $(0,1)$ y elegir ε suficientemente chico como para que respete la medida de

I. Como esta última es $\frac{1}{2^k}$, debemos fijar ε en cualquier real computable del intervalo $\left(0, \frac{1}{2^{k+1}}\right]$. Así, calcularemos un número

$$0.a_1\ a_2\ ...\ a_k\ b_1\ b_2\ ...\ b_n\ ...$$

en dónde los $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_k$ son conocidos y los b_n $(n \geq 1)$ se definen de la forma ya descripta mediante sucesivas divisiones de I. Para determinar b_n definiremos los intervalos

$$\begin{aligned} c_0^n &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^{j+k}}, \frac{1}{2^{n+k}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^{j+k}} \right) \text{ y} \\ c_1^n &= \left(\frac{1}{2^{n+k}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^{j+k}}, \frac{1}{2^{n+k-1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^{j+k}} \right) \end{aligned}$$

de medida $\frac{1}{2^{n+k}}$ cada uno. Notemos que estos intervalos escritos en binario son

$$\begin{aligned} c_0^n &= (0.a_1\ a_2\ ...\ a_k\ b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}, 0.a_1\ a_2\ ...\ a_k\ b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}1) \text{ y} \\ c_1^n &= (0.a_1\ a_2\ ...\ a_k\ b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}1, 0.a_1\ a_2\ ...\ a_k\ b_1\ b_2\ ...\ b_{n-1}111111...) \end{aligned}$$

y observemos que los nuevos b_n calculados no son necesariamente iguales a los de ν. Como vemos, esta forma de computar un número con prefijo binario $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ asegura que caerá afuera de todos los intervalos de Δ y por lo tanto será absolutamente normal. Del mismo modo, se puede generalizar la idea si el prefijo $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ está en cualquier otra base.

En resumen, si queremos computar un número absolutamente normal en la base q debemos modificar la cantidad de partes en las que dividimos a los intervalos; si queremos que el número comience con cierta cadena finita de dígitos, debemos ajustar ε y modificar el intervalo inicial.

Para terminar, mencionemos que si tomamos un número computable absolutamente normal y fijamos un intercambio de sus dígitos, entonces el nuevo número obtenido también resulta computable y absolutamente normal. Es decir, si sabemos que el número escrito en la base q

$$0.b_1\ b_2\ b_3\ ...$$

es absolutamente normal y tenemos una función $f : \{0, 1, ..., q-1\} \to \{0, 1, ..., q-1\}$ biyectiva, entonces

$$0.f(b_1)\ \ f(b_2)\ \ f(b_3)\ \ ...$$

también es absolutamente normal. Sin embargo, es posible que este número quede cubierto por algún intervalo de Δ.

5. Una codificación del algoritmo

Damos a continuación un algoritmo (no necesariamente eficiente) que computa ν siguiendo la misma estrategia que vimos en la construcción de la sección 3.

```
Procedure AbsNorm ()
   var n, pn: integer
   var c0, c1, sel: Interval
   var Delta: ListOfIntervals
   var e: rational
   e:=1/2
   n:=1
   c0:=CreateInterval(0,1/2)
   c1:=CreateInterval(1/2,1)
   repeat forever
      pn:=5*2^(2*n-2)
      Delta:=ComputeDelta(pn,e)
      if Measure(Delta,c0)<=Measure(Delta,c1) then
         write(‘‘0’’)
         sel:=c0
      else
         write(‘‘1’’)
         sel:=c1
      end if
      c0:=CreateInterval(Left(sel),(Left(sel)+Right(sel))/2)
      c1:=CreateInterval((Left(sel)+Right(sel))/2,Right(sel))
      n:=n+1
   end repeat
end procedure

Function ComputeDelta (pn: integer, e: rational): ListOfIntervals
   var b: Sequence
   var l: ListOfIntervals
   var I: Interval
   for q:=2 to pn do
      for m:=1 to pn do
         for n:=n(m,q,e) to pn*n(m,q,e) do
            for p:=0 to q-1 do
               b:=CreateSequence(n,q)
               First(b)
               for i:=1 to 2^n do
                  if abs(c(b,p)/n-1/q)>=1/m then
                     I:=SequenceToInterval(b)
                     Insert(l,I)
                  end if
                  Next(b)
               next i
            next p
```

```
      next n
    next m
  next q
  return (l)
end function
```

El procedimiento `AbsNorm` escribe (con el comando `write`) dígito a dígito el desarrollo fraccionario de ν en binario. En este algoritmo se fija $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pero recordemos que podemos utilizar cualquier ε del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ y en cualquier caso obtendremos un número absolutamente normal. La función `ComputeDelta` recibe como parámetro a p_n y calcula el conjunto Δ_{p_n} (implementado como una lista de intervalos).

A continuación incluimos algunas funciones auxiliares que se usan en el algoritmo. La función `Measure` recibe como parámetros un conjunto de intervalos Δ_k y un intervalo c y computa la medida de Δ_k restringido a c (o sea $\mu\left(\Delta_k \cap c\right)$). Las funciones `Intersection` y `Union` computan la intersección y unión entre dos intervalos e `IntervalMeasure(b)` devuelve la medida del intervalo `b`. Por último la función `n(m,q,e)` computa $n_{m,q}(\varepsilon)$.

```
Function Measure (l: ListOfIntervals, c: Interval): rational
  var i, j: integer
  var m: rational
  var stop: boolean
  i:=1
  while i<=Length(l)
    j:=i+1
    stop:=false
    while j<=Length(l) and not stop
      if IntervalMeasure(Intersection(l[i],l[j]))>0 then
        l[i]:=Union(l[i],l[j])
        Remove(l,j)
        stop:=true
      end If
      j:=j+1
    end while
    if not stop and j>Length(l) then i:=i+1
  end while
  m:=0
  for i:=1 to Length(l)
    m:=m+IntervalMeasure(Intersection(l[i],c))
  next i
  Return (m)
end function

Function Intersection (a: interval, b:interval): Interval
  var r as Interval
  if Left(a)<=Left(b) then
    if Right(a)<Left(b) then
      r:=CreateInterval(0,0)
```

```
      else
         if Right(a)>Right(b) then
            r:=CreateInterval(Left(b),Right(b))
         else
            r:=CreateInterval(Left(b),Right(a))
         end if
      end If
   else
      m:=Intersection(b,a)
   end if
   return (r)
end function

Function Union (a: Interval, b:Interval): Interval
   return (CreateInterval(min(Left(a),Left(b)),max(Right(a),Right(b))))
end function

Function IntervalMeasure(a: interval): rational
   return (Right(a)-Left(a))
end function

Function n(m:integer, q:integer, e:rational): rational
   return (Trunc(24*m^6*q^2/e)+2)
end function
```

Utilizamos el tipo `Interval` para representar a los intervalos abiertos de la forma (a, b) con a y b racionales y el tipo `ListOfIntervals` para representar a los conjuntos de intervalos. Asumimos que el tipo `Interval` tiene el constructor `CreateInterval` (que recibe como parámetros el extremo inferior y el extremo superior del intervalo que se quiere construir) y que si `c` es una variable de tipo `Interval`, entonces `Left(c)` devuelve el extremo inferior de `c` y `Right(c)` devuelve el extremo superior de `c`. Asumimos también que si `l` es de tipo `ListOfIntervals` entonces `Length(l)` devuelve la cantidad de elementos de la lista `l`; `l[i]` devuelve el elemento de la posición `i` dentro de la lista `l`; `Insert(l,c)` inserta el elemento `c` en la lista `l` y `Remove(l,i)` elimina de la lista `l` al elemento de la posición `i`. También utilizamos el tipo `Sequence` para representar secuencias finitas escritas distintas bases. El constructor `CreateSequence` recibe como parámetros la cantidad de dígitos de la secuencia y la base que se usará. La función `C(b,p)` devuelve la cantidad de ocurrencias del dígito `p` en la secuencia `b`. Si `b` es de tipo `Sequence`, entonces `First(b)` inicializa todos sus dígitos en 0 y `Next(b)` devuelve la siguiente secuencia en el orden normal. Por ejemplo, si `b` es la secuencia creada por `CreateSequence(5,2)` entonces el comando `First(b)` dejará `b` $= 00000$ y a medida que apliquemos `Next(b)` iremos obteniendo las secuencias 00000, 00001, 00010, 00011, 00100, ... Finalmente, la función `SequenceToInterval` toma una secuencia (de tipo `Sequence`) y la transforma en intervalos (de tipo `Interval`) de la siguiente manera: si `b` es la secuencia $b_1\ b_2\ ...\ b_n$ con base q, -y por lo tanto fue creada por `CreateInterval(n,q)`- entonces `SequenceToInterval(b)` devuelve el intervalo $\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}\, , \, \frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right)$.

Agradecimientos

Hace un tiempo, Guillermo Martínez encontró en *Elementary Theory of Numers*, de M. W. Sierpinski (1964), el siguiente párrafo:

> A number which is normal in any scale is called absolutely normal. The existence of absolutely normal numbers was proved by E. Borel. His proof is based on the measure theory and, being purely existential, it does not provide any method for constructing such a number. The first effective example of an absolutely normal number was given by me in the year 1916. As was proved by Borel almost all (in the sense of measure theory) real numbers are absolutely normal. However, as regards most of the commonly used numbers, we either know them not to be normal or we are unable to decide whether they are normal or not. For example we do not know whether the numbers $\sqrt{2}$, π, e are normal in the scale of 10. Therefore, though according to the theorem of Borel almost all numbers are absolutely normal, it was by no means easy to construct an example of an absolutely normal number. Examples of such numbers are fairly complicated.

Su inquietud y la dedicación de Verónica Becher fueron esenciales para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arthmetiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27:247–271, 1909.

[2] G. J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. J. *Assoc. Comput. Mach.*, 22:329–340, 1975.

[3] M. W. Sierpinski. Démonstration élèmentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. *Bull. Soc. Math. France*, 45:127–132, 1917.