Modelos de Optimización Robusta para un Problema de Planificación Agregada de la Producción bajo Incertidumbre en las Demandas*

Víctor M. Albornoz S. *Luis E. Contesse B.*

Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Correo 22, Santiago, Chile
valborno@ing.puc.cl, lcontess@ing.puc.cl

Resumen

In this paper we formulate and solve different robust optimization models for an aggregate production planning problem with uncertainty in the demands. Also, different inequalities for the optimal value of these models, as well as for some alternative deterministic models, are stated. Finally, all these inequalities are tested on a real world production planning problem.

Keywords: Stochastic Programming; Robust Optimization; Aggregate Production Planning.

1 Introducción

La Planificación Agregada de la Producción tiene por objetivo proveer una política óptima de producción sobre un cierto horizonte de planificación de mediano plazo de modo que, por una parte, maximice la utilidad de la compañía, y por otra, permita satisfacer los requerimientos de demanda para los distintos productos elaborados. Para la fabricación de estos, se dispone de diversos recursos escasos como mano de obra, materias primas y disponibilidad de máquinas, talleres y bodegas.

*Parcialmente financiado por el Fondo Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile, Proyecto Fondecyt N°1970116.

Corrientemente, la formulación de modelos de Planificación Agregada de la Producción asume que todos los parámetros del modelo son conocidos con exactitud. Sin embargo, en muchos casos este supuesto no es válido, ya que estos representan usualmente precios, costos y/o demandas futuras, parámetros que sólo es posible incorporar a través de escenarios o, más generalmente, a través de una cierta distribución de probabilidad, eventualmente continua. Ahora bien, la Optimización Robusta que nos concierne en este trabajo, permite incorporar la noción de incertidumbre en la toma de decisiones óptimas.

En este artículo se aborda un problema real de planificación agregada de la producción, que contempla la elaboración de múltiples productos, bajo demandas inciertas. Este problema es resuelto mediante el uso de diversos modelos de Optimización Robusta. A los modelos robustos, se suman otros modelos determinísticos que toman en cuenta la incertidumbre de una manera más sencilla. Una vez formulados y resueltos los distintos modelos, se comparan entre sí los correspondientes valores óptimos de la función de utilidad, dando cuenta, en particular, de cuán buena es la solución de uno cualquiera de los modelos robustos respecto de los restantes.

El presente artículo se ha organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el modelo determinístico que hemos tomado como base para las distintas formulaciones alternativas. En la sección 3 se muestran modelos determinísticos para abordar la incertidumbre de las demandas. En la sección 4 se formulan diversos modelos de Optimización Robusta para el problema bajo incertidumbre en las demandas. En la sección 5 se muestran los resultados de las experiencias computacionales llevadas a cabo sobre un problema real de planificación de la producción. Finalmente, en la sección 6 se señalan algunos comentarios y conclusiones obtenidas a partir del presente trabajo.

2 Modelo Determinístico de Planificación Agregada de la Producción

La planificación agregada de la producción es sin lugar a dudas uno de los problemas relevantes que debe ser considerado para el buen funcionamiento de sistemas productivos cada vez más complejos. Para satisfacer la demanda por los distintos productos que se elaboran, sobre un horizonte de planificación de varios meses, la resolución de este problema va a proveer los niveles óptimos de producción, conjuntamente con los niveles de empleo, contrataciones, despidos e inventario.

Numerosos autores en los últimos cuarenta años han propuesto diversos modelos de optimización para este problema. Una clasificación de varios de estos modelos y de sus respectivas técnicas de resolución puede consultarse en el artículo de Nan y Logendram [17].

Las distintas formulaciones que se proponen y estudian en el presente artículo, están basadas en un modelo determinístico descrito originalmente en Gazmuri *et al.* [12]. Este modelo considera un horizonte de planificación de T períodos (meses), para la elaboración de N productos, utilizando para ello un total de K máquinas, distribuidas en Q talleres. Al mismo tiempo, supone conocidas las demandas para cada producto en cada período.

La función objetivo de este modelo consiste en maximizar el beneficio total dado por la diferencia entre el ingreso total y los distintos costos, donde estos últimos incluyen los costos de materias primas, remuneraciones, cambios en la fuerza laboral, setups, inventario y faltante. Los parámetros que aparecen en la función objetivo son los siguientes: el precio unitario p_{it} del producto i en el período t, el costo unitario c_{it}^{ma} de materias primas para el producto i en el período t, el costo de salario c_{qt}^{sa} para un operario del taller q en el período t, el costo c_t^{co} de contratación de un operario en el período t, el costo c_t^{de} de despidos de un operario en el período t, el costo c_{it}^{se} de setup para el producto i en el período t, el costo unitario c_{it}^{in} de inventario para el producto i en el período t y, finalmente, el costo unitario c_{it}^{fa} de faltante para el producto i en el período t.

Por su parte, las distintas decisiones del problema de producción están sujetas a los requerimientos de demanda, a la capacidad de las máquinas, al tamaño de los lotes y a la cantidad de trabajadores asignados a cada taller. Los parámetros que aparecen en las restricciones del modelo son los siguientes: la demanda d_{it} por el producto i en el período t, el inventario inicial y_{i0} y la demanda pendiente inicial z_{i0} para el producto i, el número r_{ik} de horas requeridas para la elaboración del producto i en la máquina k, el factor de eficiencia ef_k de la máquina k, la disponibilidad total ta_{kt} de horas de la máquina k en el período t, el tamaño mínimo x_i^{min} y máximo x_i^{max} de cada lote para el producto i, la cantidad b_{iq} de horas–hombre requeridas para elaborar el producto i en el taller q y, por último, el factor de eficiencia f_q en el taller q.

Las variables de decisión para este modelo son:

x_{it}	$=$	cantidad de producto i elaborada en el período t,
γ_{it}	$=$	variable binaria que vale 1 si el producto i es elaborado en t y 0 si no,
nt_{qt}	$=$	número de trabajadores en el taller q en el período t,
$cont_t$	$=$	número de contrataciones en el período t,
$desp_t$	$=$	número de despidos en el período t,
y_{it}	$=$	nivel de inventario para el producto i en el período t y
z_{it}	$=$	nivel de demanda pendiente para el producto i en el período t.

Así, el modelo determinístico de programación lineal entera mixta resultante es:

$$\textbf{Max} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} p_{it}(x_{it} + y_{it-1} - y_{it}) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{ma} x_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{se}\gamma_{it} -$$

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{t=1}^{T} c_{qt}^{sa} nt_{qt} - \sum_{t=1}^{T} c_t^{co} cont_t + c_t^{de} desp_t - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{in} y_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{fa} z_{it} \tag{1}$$

s.a.

$$x_{it} + y_{it-1} - y_{it} = d_{it} + z_{it-1} - z_{it} \quad \forall i = 1, \ldots, N,\ \forall t = 1, \ldots, T \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_{ik} x_{it} \leq ef_k ta_{kt} \qquad \forall k = 1, \ldots, K,\ \forall t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

$$x_i^{min}\gamma_{it} \leq x_{it} \leq x_i^{max}\gamma_{it} \qquad \forall i = 1, \ldots, N,\ \forall t = 1, \ldots, T \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_{iq} x_{it} \leq f_q nt_{qt} \qquad \forall q = 1, \ldots, Q,\ \forall t = 1, \ldots, T \tag{5}$$

$$\sum_{q=1}^{Q} nt_{qt} = \sum_{q} nt_{q,t-1} + cont_t - desp_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{6}$$

$$x_{it} \geq 0, nt_{qt} \geq 0, cont_t \geq 0, desp_t \geq 0, y_{it} \geq 0, z_{it} \geq 0, \gamma_{it} \in \{0, 1\} \tag{7}$$

La restricción (2) establece el balance de los niveles de producción, inventario y faltante para satisfacer los requerimientos de demanda. La restricción (3) impone que el tiempo de utilización de cada máquina sea menor o a lo sumo igual a la disponibilidad máxima de tiempo de dicha máquina. La restricción (4) impone que el tamaño de los lotes producidos varíe entre un cierto tamaño mínimo y otro máximo. La restricción (5) impone que los requerimientos de mano de obra en cada taller no excedan la cantidad de horas–hombre asignadas a cada taller, en cada período. Finalmente, la restricción (6) establece el balance de la fuerza laboral en cada período.

3 Modelos Determinísticos Alternativos para Enfrentar la Incertidumbre

El modelo descrito en la sección anterior, para un problema de planificación agregada de la producción, no considera la presencia de aleatoriedad en las demandas futuras para cada uno de los productos que se elaboran. El supuesto de asumir la demanda como conocida con exactitud, no es adecuado si se tiene en cuenta que el horizonte de planificación abarca varios meses. En lo que sigue, asumimos que existe un número finito de escenarios para la demanda d_{it}^s de cada producto i, en cada período t, con $s \in \Omega = \{1, ..., S\}$, donde Ω define el conjunto de todos los posibles escenarios de demanda. Cada escenario $s \in \Omega$ tiene una probabilidad de ocurrencia p_s, con $p_s \geq 0$ para todo $s \in \Omega$ y $\sum_{s\in\Omega} p_s = 1$, naturalmente.

Una primera estrategia, comúnmente empleada para modelar la presencia de aleatoriedad en los parámetros de un problema, consiste en reemplazar la demanda aleatoria por su valor esperado. Sin embargo, la solución obtenida de esta manera podría no ser representativa de la realidad al no tomar en cuenta la variabilidad de los valores en torno a su valor esperado y conducir así a soluciones más bien optimistas respecto de la utilidad máxima. En lo que sigue denotamos por EV (Expected Value) al valor óptimo del modelo descrito en (1)–(7) para este caso, es decir, tomando como demanda $d_{it} = \sum_{s\in\Omega} p_s d_{it}^s$.

Fijado el nivel de producción en el valor de la solución óptima x^* del Modelo con Demanda Promedio, es posible definir niveles de inventario y^s y de demanda pendiente z^s que provean la mejor solución factible del modelo determinista (1)–(7) para el escenario de demanda d^s, como sigue:

$$\begin{array}{lll} y_{it}^s := \Delta_{its}, & z_{it}^s := 0, & si\ \Delta_{its} \geq 0 \\ y_{it}^s := 0, & z_{it}^s := -\Delta_{its}, & si\ \Delta_{its} < 0 \end{array}$$

donde

$$\Delta_{its} = x_{it}^* + y_{it-1}^s - d_{it}^s - z_{it-1}^s,$$

para un nivel dado de inventario inicial $y_{i0}^s = y_{i0}$ y de demanda pendiente inicial $z_{i0}^s = z_{i0}$, para cada producto i, nivel que es naturalmente el mismo para todos los escenarios.

A partir de los siguientes valores óptimos del Modelo con Demanda Promedio: x^*, nt^*, $cont^*$, $desp^*$ y γ^*, conjuntamente con los valores anteriormente definidos para z^s e y^s, es posible evaluar la función de utilidad en (1), para cada escenario $s \in \Omega$, en la solución factible así construida para el modelo (1)–(7) con demanda d^s. Ahora bien, dado que cada escenario tiene una probabilidad de ocurrencia p_s, se puede calcular el valor esperado de dichas utilidades. Este último valor, denotado usualmente por EEV (Expected Expected Value) [3], queda definido por:

$$\begin{aligned} EEV &= \sum_{s\in\Omega} p_s(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} p_{it}(x^*_{it} + y^s_{it-1} - y^s_{it}) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{ma}_{it} x^*_{it} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{se}_{it}\gamma^*_{it} - \sum_{q=1}^{Q}\sum_{t=1}^{T} c^{sa}_{qt} nt^*_{qt} - \sum_{t=1}^{T} c^{co}_t cont^*_t + c^{de}_t desp^*_t \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{in}_{it} y^s_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{fa}_{it} z^s_{it} \ ) \\ &= \sum_{s\in\Omega} p_s(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} p_{it}(x^*_{it} + y^s_{it-1} - y^s_{it})) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{ma}_{it} x^*_{it} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{se}_{it}\gamma^*_{it} - \sum_{q=1}^{Q}\sum_{t=1}^{T} c^{sa}_{qt} nt^*_{qt} - \sum_{t=1}^{T} c^{co}_t cont^*_t + c^{de}_t desp^*_t \\ &\quad - \sum_{s\in\Omega} p_s(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{in}_{it} y^s_{it}) - \sum_{s\in\Omega} p_s(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{fa}_{it} z^s_{it}) \end{aligned} \tag{8}$$

A partir de estas soluciones es posible construir la siguiente solución factible para el Modelo con Demanda Promedio: $(x^*, \gamma^*, nt^*, cont^*, desp^*, \sum_{s\in\Omega} p_s y^s, \sum_{s\in\Omega} p_s z^s)$, cuya utilidad para este mismo modelo está dada precisamente por el valor de EEV, de modo que se tiene claramente la siguiente desigualdad: EEV $\leq$ EV.

La diferencia entre el valor óptimo del Modelo Determinista con Demanda Promedio y este último valor, es decir EV - EEV, provee una cota superior del beneficio que representa para el tomador de decisiones el uso de modelos más complejos que incorporan más información acerca del futuro, como es el caso de los modelos robustos que se presentan en la siguiente sección. De este modo, cuando esta diferencia sea pequeña, la resolución de estos últimos modelos no va a aportar nada significativo; por el contrario, un valor grande de esta diferencia establece la necesidad de resolver modelos que incorporen la incertidumbre de manera explícita pues, en valor esperado, al tomar la decisión del modelo con demanda promedio se puede estar muy lejos de la utilidad qué finalmente se vaya a dar, una vez que han tenido lugar las demandas futuras.

Una alternativa al Modelo con Demanda Promedio, consiste simplemente en resolver el modelo de optimización (1)–(7) para cada escenario de demanda por separado y proveer al tomador de decisiones la solución óptima para cada uno de ellos. Sin embargo, la implementación de esta estrategia requiere que el tomador de decisiones conozca, o espere, la realización de la demanda sobre todo el período de planificación, de modo de escoger la política óptima resultante para ese escenario de demanda. Esta estrategia es conocida como "wait and see" en contraste a la situación "here and now" presente en los Modelos con Recurso de la Programación Estocástica (ver [5] y [13]). Dado que en la práctica el tomador de decisiones no sabe con anterioridad qué escenario de demanda se va a dar, resulta necesario definir alguna función de utilidad para evaluar esta estrategia. Comúnmente, el valor empleado para dicha evaluación consiste en calcular el promedio de las utilidades óptimas para cada escenario o equivalentemente, tomar el promedio para cada una de las distintas decisiones óptimas obtenidas por escenario y evaluar esta decisión promedio en la función objetivo del modelo (1)–(7). En nuestro caso, dada la presencia de variables enteras en la formulación del modelo, se empleará el promedio de los ingresos menos el promedio de los distintos costos exceptuando el de setup. Para incluir este último costo, se hará una elección más conservadora que consiste en tomar el costo de setup asociado a la producción promedio resultante de las decisiones por escenario. Este costo de setup así definido equivale a incluir en el valor de la estrategia un costo de setup si al menos en un escenario de demanda, para un producto y período dado, la solución óptima de producción es positiva. En lo que sigue, el valor de esta estrategia se denota por WS (Wait and See) [14].

Por otra parte, a partir de la solución obtenida para el escenario s en la definición de la estrategia "wait and see", tomando los promedios de todas las variables continuas, por escenarios, conjuntamente con la variable de setup asociada a la producción promedio, se tiene una solución factible del modelo determinista con demanda promedio, cuyo valor, evaluado en la función objetivo de este último modelo, es precisamente WS, de modo que se satisface la desigualdad: WS $\leq$ EV.

4 Modelos de Optimización Robusta

En la sección anterior se consideraron diversas alternativas de modelamiento de la incertidumbre a través de modelos deterministas. La literatura ofrece otras referencias de interés para abordar este problema. Entre ellas, cabe mencionar el artículo de Bitran y Yanase [6] que incorpora restricciones probabilísticas en un modelo de producción, así como los artículos de Escudero *et al.* [8] y Escudero and Kamesan [9], que consideran modelos de Optimización Estocástica con Recurso para problemas de planificación de la producción.

A diferencia de los modelos presentados en la sección anterior, un modelo de Optimización Robusta, ver Bai *et al.* [2], Escudero [10], Malcon and Zenios [15] y Mulvey *et al.* [15], incluye explícitamente los parámetros aleatorios en su formulación, entregando soluciones óptimas de compromiso en el sentido de que más que exigir la factibilidad de las decisiones para cada escenario por separado, se minimiza conjuntamente el valor esperado de la utilidad más una cierta función de penalización para las posibles infactibilidades. Así, el modelo resultante provee una decisión de producción que es robusta con respecto a la optimalidad, en el sentido de que es "suficientemente óptima" para cada escenario por separado y al mismo tiempo robusta con respecto a la factibilidad al obtener soluciones "aceptablemente factibles" para cada escenario. Más precisamente, la siguiente es una formulación robusta del problema de Planificación Agregada de la Producción correspondiente a un Modelo Robusto Lineal con Recurso Simple:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{SR} = \mathbf{Max} & \sum_{s\in\Omega} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} p_{it}(x_{it} + y_{it-1}^{s} - y_{it}^{s})\right) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{ma} x_{it} \\
& - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{se}\gamma_{it} - \sum_{q=1}^{Q} \sum_{t=1}^{T} c_{qt}^{sa} nt_{qt} - \sum_{t=1}^{T} c_{t}^{co} cont_t + c_t^{de} desp_t \\
& - \sum_{s\in\Omega} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{in} y_{it}^{s} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{fa} z_{it}^{s}\right) \qquad (9) \\
\mathbf{s.a.} & x_{it} + y_{it-1}^{s} - y_{it}^{s} = d_{it}^{s} + z_{it-1}^{s} - z_{it}^{s} \qquad \forall i\ \forall t\ \forall s \\
& \sum_{i=1}^{N} r_{ik} x_{it} \le ef_k ta_{kt} \qquad \forall k\ \forall t \\
& x_i^{min}\gamma_{it} \le x_{it} \le x_i^{max}\gamma_{it} \qquad \forall i\ \forall t \\
& \sum_{i=1}^{N} b_{iq} x_{it} \le f_q nt_{qt} \qquad \forall q\ \forall t \\
& \sum_{q=1}^{Q} nt_{qt} = \sum_{q=1}^{Q} nt_{q,t-1} + cont_t - desp_t \qquad \forall t \\
& x_{it} \ge 0, nt_{qt} \ge 0, cont_t \ge 0, desp_t \ge 0, y_{it}^{s} \ge 0, z_{it}^{s} \ge 0, \gamma_{it} \in \{0,1\}
\end{array}
$$

En este modelo, sólo se utilizaron las variables de inventario y faltante como las únicas variables de recurso para enfrentar la incertidumbre. Las restantes variables de decisión del problema, a saber, x_{it}, γ_{it}, nt_{qt}, $cont_t$ y $desp_t$, toman sus valores de una vez y para siempre (es decir, "here and now"), independientemente del escenario particular que finalmente tenga lugar sobre todo el horizonte de planificación. Este modelo posee más variables y restricciones que el modelo determinístico, así por ejemplo la restricción de balance de producción es ahora una por cada producto, en cada período y por cada escenario.

Ahora bien, una técnica comúnmente empleada en problemas con horizonte de planificación de varios períodos, consiste en el uso de "Horizonte Rodante". En esta técnica, cada vez que se resuelve el modelo sobre un horizonte de planificación de largo fijo, sólo son tomadas las decisiones del primer período y una vez que la incertidumbre de ese período desaparece, se actualiza la información de las demandas futuras, se corrigen los datos iniciales del modelo y entonces el modelo es resuelto nuevamente a partir del siguiente período, y así sucesivamente.

En este artículo, por el contrario, sólo se suponen conocidas las predicciones de la demanda en un número fijo de T períodos y se propone emplear una técnica de horizonte rodante reduciendo cada vez en uno el número de períodos, usando el modelo robusto con recurso simple formulado en (9). Así, en cada período t^* del horizonte de planificación original, y de acuerdo a cómo se haya presentado la demanda real hasta ese período, se resuelve el modelo robusto sobre los períodos que van de t^* en adelante, considerando t^* como período inicial, conservando sólo la decisión óptima que arroja este modelo para este período inicial t^*. Para ello, es necesario modificar las probabilidades de los nuevos escenarios resultantes de esta reducción del horizonte de planificación.

Definidos los escenarios de demanda de manera arborescente, esto es, considerando todos los escenarios posibles que se pueden formar sobre todo el horizonte de planificación, combinando un número finito de valores para la demanda de cada producto en cada período. La estrategia de horizonte rodante provee una variable de decisión para el período t, que en ese momento es el primer período de planificación en esta estrategia, que es la misma decisión para todos los escenarios que coinciden hasta ese período. Así por ejemplo, cuando resolvemos por primera vez el modelo robusto con recurso simple, sólo tenemos un valor para la decisión óptima de producción en el primer período ($t = 1$). Dado que todos los escenarios coinciden en $t = 1$, esta única decisión en ese período es la tomada por todos los escenarios del modelo original. Dado lo anterior, la estrategia de horizonte rodante va a proveer, período a período para cada escenario, valores óptimos $\overline{x}^s_{it}, \overline{\gamma}^s_{it}, \overline{nt}^s_{qt}, \overline{cont}^s_t, \overline{desp}^s_t, \overline{y}^s_{it}$ y $\overline{z}^s_{it}$ todos los cuales van a permitir evaluar una función de utilidad del horizonte rodante que se denota por RH, según

$$\begin{aligned}\mathbf{RH} = \sum_{s\in\Omega} p_s \ (\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} p_{it}(\overline{x}^s_{it} + \overline{y}^s_{it-1} - \overline{y}^s_{it}) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{ma}_{it}\overline{x}^s_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{se}_{it}\overline{\gamma}^s_{it} \\ - \sum_{q=1}^{Q}\sum_{t=1}^{T} c^{sa}_{qt}\overline{nt}^s_{qt} - \sum_{t=1}^{T} c^{co}_t\overline{cont}^s_t + c^{de}_t\overline{desp}^s_t - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{in}_{it}\overline{y}^s_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c^{fa}_{it}\overline{z}^s_{it} \ )\end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente, es posible formular un modelo robusto lineal sobre todo el horizonte de planificación que, resuelto una sola vez y para siempre al inicio del período de planificación, provea una política óptima a ejecutar en cada período, según el escenario de demanda que se vaya revelando en la realidad, a medida que transcurre el tiempo. Dicho de otro modo, se formula un modelo donde el valor óptimo de cada variable de decisión depende del escenario de demanda que tenga lugar. Este último considera una variable de decisión por cada escenario, a diferencia del Modelo Robusto con Recurso Simple (9), donde sólo los valores de las variables de recurso (i.e. de inventario y demanda pendiente) toman sus valores en función del escenario de demanda. El modelo resultante se denomina Modelo Robusto con Recurso Completo (Full Recourse) y queda definido como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{FR} = \mathbf{Max} & \sum_{s\in\Omega} p_s(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} p_{it}(x_{it}^s + y_{it-1}^s - y_{it}^s) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{ma} x_{it}^s \\
& \quad - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{se} \gamma_{it}^s - \sum_{q=1}^{Q} \sum_{t=1}^{T} c_{qt}^{sa} nt_{qt}^s - \sum_{t=1}^{T} c_t^{co} cont_t^s \\
& \quad - \sum_{t=1}^{T} c_t^{de} desp_t^s - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{in} y_{it}^s - \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{fa} z_{it}^s \;) \\
\textbf{s.a.} & x_{it}^s + y_{it-1}^s - y_{it}^s = d_{it}^s + z_{it-1}^s - z_{it}^s \qquad \forall i\; \forall t\; \forall s \\
& \sum_{i=1}^{N} r_{ik} x_{it}^s \le ef_k ta_{kt} \qquad \forall k\; \forall t\; \forall s \\
& x_i^{min} \gamma_{it}^s \le x_{it}^s \le x_i^{max} \gamma_{it}^s \qquad \forall i\; \forall t\; \forall s \\
& \sum_{i=1}^{N} b_{iq} x_{it}^s \le f_q nt_{qt}^s \qquad \forall q\; \forall t\; \forall s \\
& \sum_{q=1}^{Q} nt_{qt}^s = \sum_{q=1}^{Q} nt_{q,t-1}^s + cont_t^s - desp_t^s \qquad \forall t\; \forall s \\
& x_{it}^s \ge 0, nt_{qt}^s \ge 0, cont_t^s \ge 0, desp_t^s \ge 0, y_{it}^s \ge 0, z_{it}^s \ge 0, \gamma_{it}^s \in \{0,1\}
\end{array} \tag{11}
$$

Esta alternativa de modelamiento permite una mayor flexibilidad para abordar la incertidumbre que la alternativa de recurso simple del modelo robusto (9), entregando finalmente una mayor utilidad en el óptimo que este último, es decir, FR$\geq$SR. Esto es consecuencia del hecho que el modelo (9) puede ser reformulado equivalentemente como uno de recurso completo, agregando aquellas restricciones adicionales que imponen que las decisiones de producción, setup y mano de obra sean las mismas para todos los escenarios de demanda. Así, el modelo con recurso completo (11) puede ser simplemente considerado como una relajación del modelo con recurso simple (9). Por otro lado, es claro que esta alternativa de modelamiento evita tener que aplicar el esquema de horizonte rodante período a período, como en caso de recurso simple, aunque presupone que los escenarios se mantienen invariables sobre todo el horizonte de planificación.

Cabe mencionar que en caso de existir escenarios que coincidan hasta un determinado período, es necesario agregar al modelo (11) un conjunto de restricciones, llamadas de no–anticipatividad, que obligan a tomar la misma decisión para aquellas variables correspondientes a escenarios que coincidan hasta ese determinado período de planificación. Estas últimas restricciones se cumplen trivialmente para las variables de inventario y faltante en el modelo (9), de modo que en (10) sólo es necesario agregarlas para las restantes variables del modelo. Esto puede ser realizado añadiendo explícitamente estas restricciones al modelo (11) o utilizándolas para disminuir el número de variables del mismo. Sin embargo, en ambos casos estas restricciones de no–anticipatividad son las que imposibilitan la separabilidad del modelo por escenarios.

Anteriormente, se destacaban las ventajas de este modelo por sobre el modelo robusto con recurso simple, pero al mismo tiempo se debe señalar que es el de más difícil resolución ya que su tamaño es considerablemente mayor que el de todos los modelos formulados anteriormente. En efecto, dado que ahora cada variable de decisión del modelo es por escenario de demanda, esto impone que cada una de las restricciones del modelo aparezca tantas veces como escenarios haya. Esto último conduce a la resolución de un problema de gran tamaño que la mayoría de las veces necesita de un algoritmo especializado que haga uso, por ejemplo, de técnicas de descomposición o penalización lagrangeana, las cuales permiten explotar la estructura especial que pueda poseer el modelo. Existe una amplia literatura en soluciones algorítmicas específicas para diversos problemas de naturaleza estocástica, una revisión de alguna de estas soluciones y referencias bibliográficas adicionales puede consultarse en [4], [5], [7], [10] y [13].

5 Resolución Computacional de un Problema Real

En esta sección se presentan y comparan los principales resultados obtenidos en la aplicación de distintos modelos de Planificación Agregada de la Producción, descritos previamente, sobre la base de datos tomados de un problema real que resuelve la planificación de una empresa de electrodomésticos. Este problema, contempla la elaboración de un total de 20 productos, utilizando 41 máquinas, distribuidas en 17 talleres, sobre un horizonte de planificación de 6 meses de producción. El modelo determinístico correspondiente posee un total de 474 variables continuas, 120 variables binarias y 714 restricciones lineales, sin considerar las restricciones de no negatividad en las variables continuas.

En lo que respecta a la generación de escenarios de demanda, estos se obtuvieron a partir de distintos pronósticos para la demanda en cada una de las etapas resultantes de agrupar uno o más períodos de tiempo. Así, la construcción de los escenarios es como sigue: en cada etapa, exceptuando la primera, se poseen tres pronósticos de demanda que se pueden calificar de demandas alta, promedio y baja, cada uno con probabilidades de ocurrencia de: $1/5$, $3/5$ y $1/5$ respectivamente. En seguida, tomando todas las posibles combinaciones de demanda que puedan tener lugar sobre las distintas etapas consideradas se tiene todos los posibles escenarios. Esto se representa de manera gráfica como un árbol donde la raíz corresponde a la primera etapa y los nodos sucesivos a las distintas etapas, existiendo en cada nivel tres nodos por cada nodo en la etapa anterior. Cada rama de este árbol es lo que se llama un escenario de demanda d^s y su peso (probabilidad) p_s corresponde simplemente al producto de las respectivas probabilidades en cada etapa. La siguiente tabla muestra como fueron agrupados los distintos períodos, la cantidad de escenarios considerados en cada caso y tamaño del modelo con Recurso Simple.

Para la resolución del Modelo Robusto con Recurso Simple ante un gran número

	9 escenarios	27 escenarios	81 escenarios
No. de etapas (períodos)	3 (1, 2, 3-6)	4 (1, 2, 3, 4-6)	5 (1, 2, 3, 4, 5-6)
Modelo con Recurso Simple	2514 variables	6834 variables	19794 variables
	(120 binarias)	(120 binarias)	(120 binarias)

Tab. 1: Tamaño de los problemas resueltos.

de escenarios, esto es por ejemplo, un número de escenarios tal que el problema ya no pueda ser resuelto de manera directa con un solver, se hace necesario diseñar algoritmos especializados que permitan explotar la estructura particular del modelo. Un algoritmo para enfrentar esta dificultad, ver [1], consiste en reformular un modelo equivalente a (9) que resulta de definir todas las variables de decisión del modelo por escenarios, imponiendo simultáneamente ciertas restricciones adicionales de consistencia que aseguren, en la solución óptima, la igualdad para los valores de las variables por escenarios, que corresponden a decisiones que originalmente no lo eran. El modelo así obtenido puede ser entonces resuelto mediante Relajación Lagrangeana, relajando precisamente estas restricciones de consistencia. Esto permite, en cada iteración principal, una cierta descomposición por escenarios del modelo equivalente en subproblemas de la misma naturaleza que el modelo determinista. Este algoritmo, en el caso lineal, puede ser implementado mediante el Método de Descomposición de Dantzig–Wolfe.

La siguiente tabla en tanto, resume los valores óptimos obtenidos, expresados en millones de pesos, para los distintos modelos estudiados en el presente trabajo. Los modelos, fueron formulados en el lenguaje de modelamiento algebraico AMPL (Fourer *et al.* [11]), utilizando el solver CPLEX 3.0 en un Cluster 8 AXP 3700, escogiendo una tolerancia de 3% para el error relativo del Método Branch and Bound en la aplicación de CPLEX. En lo que respecta a los tiempos de ejecución de los distintos modelos, estos van desde unos pocos segundos para el modelo determinista en ciertos escenarios de demanda hasta unas pocas horas para el modelo con recurso simple ante 81 escenarios de demanda.

Los valores de la tabla satisfacen las desigualdades obtenidas tanto por Madansky [14] y Birge [3] para problemas lineales en variables continuas, como las establecidas en el presente trabajo, a saber: EEV $\leq$ SR $\leq$ WS $\leq$ EV. Los resultados también verifican la desigualdad SR$\leq$RH, la cual naturalmente se cumple pues una solución óptima del modelo con recurso simple es factible en el esquema de horizonte rodante aquí empleado.

Por otra parte, una medida que es utilizada para determinar la importancia de la incertidumbre en el modelo matemático, denominada EVPI=WS-SR$\leq$ EV-EEV (the

	9 escenarios	27 escenarios	81 escenarios
Modelo con Dda. Promedio	EV = 5565	EV = 5565	EV = 5565
Modelo Wait and See	WS = 5506	WS = 5521	WS = 5549
Modelo con Horizonte Rodante	RH = 5495	RH = 5520	RH = 5544
Modelo con Recurso Simple	SR = 5330	SR = 5375	SR = 5351
	EEV = 5267	EEV = 5320	EEV = 3475

Tab. 2: Valores óptimos de los problemas resueltos.

expected value of perfect information), que representa la máxima cantidad que uno estaría dispuesto a pagar por la información completa del futuro, es del orden de unos 200 millones de pesos.

Otra medida de interés es el valor VSS=SR-EEV (the value of the stochastic solution), introducida por Birge [2], que da también una medida de cómo se comporta el modelo determinístico con respecto a las soluciones que provee un modelo más complejo como los modelos robustos aquí formulados, que en este caso es del orden de 55 millones de pesos para los dos primeros casos y de 1900 para el último. Este mayor valor se explica en parte por la mayor incertidumbre presente en este problema, expresada en la mayor cantidad de posibles escenarios de demanda que se debe enfrentar.

6 Conclusiones

Partiendo de un modelo determinístico para un problema específico de planificación agregada de la producción, se formularon y resolvieron distintos modelos de optimización que incorporan la incertidumbre en las demandas por los distintos productos que se elaboran. Los resultados obtenidos a partir del problema de prueba muestran que mientras más flexibilidad exista para reaccionar a la demanda incierta, mejores son las utilidades que se pueden alcanzar con los modelos robustos. La utilidad que se puede alcanzar con el empleo de modelos robustos es más que satisfactoria considerando las distintas medidas del valor de la información obtenidas en las experiencias llevadas a cabo. Como se ha mencionado anteriormente, el tamaño de los modelos robustos puede llegar a ser muy grande y esto hace necesario el uso de algorítmos específicos para su resolución, especialmente cuando su tamaño se acerca o excede los límites del solver empleado en su resolución directa. Finalmente, debemos mencionar que posibles extensiones de los modelos de optimización robusta aquí estudiados se obtendrían al incorporar aleatoriedad no sólo en las demanda futuras si no también en algunos costos, precios o tasas de producción.

Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecen en forma especial al referee quien, con sus valiosos y precisos comentarios, contribuyó a mejorar la presentación original de este trabajo.

Referencias

[1] V. ALBORNOZ y L. CONTESSE, Formulación y Resolución de un Modelo Robusto de Planificación Agregada de la Producción. Actas del VIII CLAIO y XXVIII SBPO. Volumen III (1996), 1390–1395.

[2] D. BAI, T. CARPENTER, and J.M. MULVEY, Making a case for robust optimization models. Management Science 43, No. 7 (1997), 895–907.

[3] J.R. BIRGE, The Value of the Stochastic Solution in Stochastic Linear Programs with Fixed Recourse. Mathematical Programming 24 (1982), 314–325.

[4] J.R. BIRGE, Current Trends in Stochastic Programming Computation and Application. http://www.-personal.engin.umich.edu/~jrbirge (paper in Postscript). Department of Industrial and Operations Engineering. University of Michigan. Ann Arbor. 1995.

[5] J.R. BIRGE and F. LOUVEAUX, Introduction to Stochastic Programming, Springer–Verlag, New York, 1997.

[6] G. BITRAN and H. YANASSE, Deterministic Approximations to Stochastic Production Problems. Operations Research, Vol. 32, No. 5 (1984), 999–1018.

[7] YU ERMOLIEV and R. WETS (eds.). Numerical Techniques for Stochastic Optimization, Springer Verlag, New York, 1988.

[8] L. ESCUDERO, P. KAMESAN, A. KING and R. WETS, Production Planning via Scenarios Modeling. Anns. Opns. Res. 43 (1993), 311–335.

[9] L. ESCUDERO and P. KAMESAN, MRP Modeling via Scenarios. En Ciriani, T. and Leachman, R. (ed.). Optimization in Industry. Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice, John Wiley and Sons, Chichester, 1993.

[10] L. ESCUDERO, Optimización Robusta. Tutorial VII Congreso Latino-Ibero Americano de Investigación de Operaciones e Ingeniería de Sistemas. Santiago, Julio de 1994.

[11] R. FOURER, D. GAY, B. KERNIGHAM and R. WETS, AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming, Scientific Press, South San Francisco, 1993.

[12] P. GAZMURI, L. CONTESSE, A. CANDIA, M. ALFARO y W. JOHNSON, Desarrollo de un Modelo de Planificación de la Producción para la Compañía Tecno Industrial CTI, Informe Final. Empresa Consultores G.B.O. Ltda. Santiago, Chile, 1992.

[13] P. KALL and S. WALLACE, Stochastic Programming, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1994.

[14] A. MADANSKY, Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems. Management Science, Vol. 6 (1960), 197–204.

[15] S. MALCON and S. ZENIOS, Robust Optization for Power Capacity Expansion Planning. Journal of Operational Research Society 45, (1994), 1040–1049.

[16] MULVEY, J., VANDERBEI, R. and ZENIOS, S., Robust Optimization of Large-Scale Systems. Operations Research 43, No.2 (1995), 264–281.

[17] S. NAM and R. LOGENDRAN, Aggregate Production Planning- A Survey of Models and Methodologies. European Journal of Operational Research 61 (1992), 255–272.