Sous les facettes des Polyèdres,

sous les facettes, les polyèdres

Jean François Maurras

Laboratoire d'Informatique de Marseille, pôle sud
Faculté des sciences de Luminy, 163 Avenue de Luminy
13288 Marseille, France

Abstract
In this survey we describe some results on combinatorial polyhedra and their applications in optimization. We begin by recalling the Simplex method, then we give some elementary properties of polyhedra, particularly the Weyl theorem. We thus introduce the combinatorial polyhedra, we give the characterization of the convex hull of the independant subsets common to two matroids on the same set. We thus give the description of the classical approximation of the travelling salesman polyhedron. We thus describe some interior point methods, and deduce, in one important practical case, the polynomial equivalence between separation and optimization on polyhedra. We end this survey noting some other points of view on combinatorial optimization.

Resumé
Dans cet article on passe en revue quelques résultats sur les polyèdres combinatoires et leurs applications en optimisation. Nous commençons par un rappel de la méthode Simplex, nous donnons alors quelques propriétés élémentaires des polyèdres, le théorème de Weyl notamment. Nous introduisons alors les polyèdres combinatoires, nous donnons la caractérisation de l'enveloppe convexe des parties libres communes à deux matroïdes sur le même ensemble. Nous donnons alors la description de l'approximation classique du polyèdre du voyageur de commerce. Nous décrivons ensuite certaines méthodes intérieures, nous en déduisons, dans un cas particulier important, l'équivalence polynomiale entre séparer un point d'un polyèdre et optimiser sur celui-ci. Nous terminons cette revue en décrivant un certains nombres d'autres points de vue sur l'optimisation combinatoire.

1 Introduction

L'étude des polyèdres est très ancienne. Sans chercher l'exhaustivité historique, citons tout de même Platon [66] et Descartes [21], qui étudient tout particulièrement les

Polyèdres Réguliers. Plus proches de nous Monge [62], le premier, résoud des *Programmes Linéaires* particuliers, puis Fourier [31], à la manière de Gauss, résoud des systèmes d'inégalités, et Euler [29] donne, pour les polyèdres de $\mathbb{R}^{\nvDash}$, *l'Identité d'Euler*, bien connue de ceux qui étudient les graphes planaires. L'étude des polyèdres continue dans la première moitié de notre siècle avec, en particulier, Weyl [74] et Carathéodory [12]. Depuis la fin de la seconde guerre mondiale l'étude des polyèdres est devenue un des thèmes centraux de la recherche appliquée. Je vais essayer dans cette présentation d'en donner les (des) raisons.

Je vois essentiellement trois dates et quatre articles :

1. 1949 et l'article de G.B. Dantzig [18] décrivant la méthode Simplex;

2. 1965 et les articles de J.R. Edmonds introduisant la complexité des algorithmes [24] et un polyèdre à sommets $0, 1$ [25];

3. 1979 et l'article de L.G. Khachian [44] qui décrit la méthode de l'ellipsoïde pour résoudre les Programmes Linéaires en temps Polynomial.

Ce dernier article avait d'ailleurs été précédé d'une note E.D.F. de votre serviteur suivie d'un article soumis en 1978 [56] [57] [59] qui décrivaient, dans l'esprit de Khachian, un algorithme polynomial pour résoudre les programmes linéaires dont la matrice des contraintes est *Totalement Unimodulaire*. Dans ces papiers, en particulier, on s'attachait à décrire le moyen d'obtenir, en temps polynomial, une solution exacte à partir d'une solution approchée.

On peut aussi considérer les polyèdres dans un autre esprit et étudier les problèmes de :

1. Classification et énumération des polyèdres. Étude du treillis des faces d'un polyèdre, de son graphe des arêtes ...

2. Représentation dans $\mathbb{Q}$, l'espace vectoriel de dimension d sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, de polyèdres dont le treillis des faces est donné. Un exemple de Micha Perles [65] montre qu'il existe des polyèdres non représentables dans $\mathbb{Q}$;

3. Borne supérieure, pour un nombre de sommets s et une dimension d'espace d donnés : quel est le nombre maximum de facettes d'une classe de polyèdres. La réponse a été donnée par P. McMullen [53] qui montre que ce nombre est celui du polyèdre enveloppe convexe de s points pris sur la courbe (gauche) $(t, t^2, \ldots, t^d)$. Une preuve d'une généralisation de ce résultat peut être trouvée dans Teissier [73].

Pour tout ces problèmes, la référence est l'ouvrage de B. Grünbaum [39] : Convex Polytopes. L'ouvrage de Bair et Fourneau constitue une bonne référence en français [2]. Celui de Yemelichev, Kovalev et Krastov [76] établit le premier un lien entre ces considérations théoriques sur les polyèdres et la Programmation Combinatoire.

On parle de *Polyèdres* et de *Polytopes*. Un polyèdre est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces, un polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. On démontre que polytopes et polyèdres bornés sont les mêmes objets.

On pourrait considérer aussi le problème de la *borne supérieure* pour les polytopes dont l'ensemble des sommets est un sous ensemble de celui des sommets du cube unité. À ma connaissance, il n'y a pas de conjecture pour ce problème ...

2 Méthode Simplex et Conséquences

Par définition, un Programme Linéaire se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max f(C)x(C), \\ A(L,C)x(C) = b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Nous utilisons une notation fonctionnelle pour représenter les matrices. Bien qu'un peu plus lourde, cette notation a, selon nous, de multiples avantages, tant pratiques que théoriques. Ce qui différencie un tel problème d'un système linéaire, plus que la fonction à maximiser, ce sont les inégalités $x(C) \geq 0$.

On suppose toujours que les lignes de $A(L,C)$ sont *linéairement indépendantes*.

On peut, moyennant le rajout de variables (non-négatives) de valorisations nulles, transformer tout problème de maximisation (ou minimisation) linéaire portant sur un domaine défini par des égalités ou des inégalités (au sens large) en un problème de la forme (1).

Définition 1: On appelle base I un sous ensemble $I \subset C$ tel que $A(L,I)$ soit carrée et régulière.

2.1 Une Transformation Élémentaire

Soit I une base. On ne change pas l'ensemble des solutions du système $A(L,C)x(C) = b(L)$ en multipliant chacun de ses membres, à gauche, par une matrice régulière. En effet, un tel produit n'est rien d'autre qu'une succession d'opération légales, et, comme multiplier le système obtenu par la matrice inverse nous redonne le système initial, les deux systèmes sont équivalents. Prémultiplions donc les deux membres de cette égalité par $A(L,I)^{-1}$, on aura :

$$x(I) = A(L,I)^{-1} \times b(L) - A(L,I)^{-1} \times A(L, C \setminus I) \times x(C \setminus I).$$

Nous avons ainsi exprimé les variables de base $x(I)$ en fonction des variables hors base $x(C \setminus I)$. Posons :

$$\begin{aligned} \bar{b}(I) &= A(L,I)^{-1} \times b(L), \\ \bar{A}(I, C \setminus I) &= A(L,I)^{-1} \times A(L, C \setminus I). \end{aligned} \tag{2}$$

D'où :

$$x(I) = \bar{b}(I) - \bar{A}(I, C \setminus I) \times x(C \setminus I).$$

Utilisons cette élimination pour exprimer $f(C)x(C)$ en fonction uniquement de $x(C \setminus I)$:

$$f(C)x(C) = f(I) \times \bar{b}(I) + (f(C \setminus I) - f(I) \times \bar{A}(I, C \setminus I)) \times x(C \setminus I).$$

On pose alors :

$$\bar{f}(C \setminus I) = f(C \setminus I) - f(I) \times A(L,I)^{-1} \times A(L, C \setminus I).$$

Remarque 1: On a autant de formes de la fonction économique que de bases. Cependant ces fonctions économiques ne coïncident que dans la variété linéaire (l'ensemble des solutions de) définie par $Ax = b$.

Définition 2: On appelle solution (réalisable) un vecteur $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ tel que : $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition 3: On appelle solution réalisable de base un vecteur $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ qui est une solution, et tel qu'il existe une base I telle que $x(C \setminus I) = 0$.

Définition 4: Considérons un système d'inégalités mises toutes dans le même sens. On appelle Inégalité conséquence, ou tout simplement Conséquence de ce système une combinaison linéaire à coefficients non négatifs de ces inégalités.

Théorème 1: Soit I une base telle que $\hat{x}(C) = (\bar{b}(I), 0(C \backslash I))$ est une solution réalisable de base; si de plus $\bar{f}(C \backslash I) \leq 0$, alors pour toute solution x on a $f(C)x(C) \leq f(C)\hat{x}(C)$.

Démonstration :
Exprimons $f(C)x(C)$ dans la base I précédente (optimale?). On a :

$$f(C)x(C) = f(I)\bar{b}(I) + \bar{f}(C \setminus I)x(C \setminus I),$$

$$f(C)\hat{x}(C) = f(I)\bar{b}(I).$$

Leur différence, $f\hat{x} - fx$, est donc $\bar{f}(C \setminus I)(-x(C \setminus I))$. Les deux vecteurs de ce produit sont des vecteurs non-positifs, leur produit est donc lui aussi non-négatif.

2.2 Le Petit Programme

Soit à résoudre le programme suivant pour lequel I est une base réalisable :

$$\begin{cases} \max x(s), \\ U(I,I)x(I) + \bar{A}(I,s)x(s) = \bar{b}(I), \\ x(C), x(s) \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

La solution $x(I) = \bar{b}(I), x(s) = 0$ est donc une solution réalisable de base. Les seules conditions sur $x(s)$ sont $x(s) \geq 0$, et celles induites par $x(i) \geq 0, \forall i \in I$. La première de ces conditions n'est pas une borne supérieure de $x(s)$. Écrivons la deuxième pour l'indice i :

$$x(i) = \bar{b}(i) - \bar{A}(i,s)x(s) \geq 0.$$

Comme $x(s) \geq 0$ et $\bar{b}(i) \geq 0$, si $\bar{A}(i,s) \leq 0$, cette condition est toujours satisfaite. En conséquence lorsque $\bar{A}(i,s) > 0$, on a :

$$x(s) \leq \frac{\bar{b}(i)}{\bar{A}(i,s)}.$$

Et donc :

$$x(s) \leq \min_{\bar{A}(i,s)>0} (\frac{\bar{b}(i)}{\bar{A}(i,s)}).$$

Lorsque ce minimum existe, il est atteint pour au moins une valeur r de i.

$$\hat{x}(s) = \frac{\bar{b}(r)}{\bar{A}(r,s)} = \min_{\bar{A}(i,s)>0} (\frac{\bar{b}(i)}{\bar{A}(i,s)}).$$

Remarque 2: L'ensemble I', $I' = (I \setminus \{r\}) \cup \{s\}$, est une base réalisable.

En effet, d'une part la matrice $(U(I, I \setminus \{r\}), \bar{A}(I, s))$ est triangulaire (il suffit de numéroter r, resp. s, en dernier). Elle est donc carrée et régulière. D'autre part la solution correspondante :

$$\hat{x}(s),\ \hat{x}(I) = \bar{b}(I) - \bar{A}(I, s)\hat{x}(s),$$

est une solution réalisable de base, car :

$$\hat{x}(r) = \bar{b}(r) - \bar{A}(r, s)\frac{\bar{b}(r)}{\bar{A}(r, s)} = 0.$$

2.3 L'algorithme du Simplex

On suppose initialement connue une solution réalisable de base x, correspondant à la base I.

Par le simple rajout de variables auxiliaires de départ, on peut avoir, au moyen de cet algorithme, une telle solution de départ. On utilise donc cet algorithme, sur des données (un peu) différentes, pour trouver cette solution.

$$\begin{array}{l} Tant\,que\,\exists\, s \in C \setminus I\; tel\,que\, \bar{f}(s) > 0\; faire \\ \qquad R\acute{e}soudre\; le\; petit\; programme\; correspondant, \\ \qquad Si\; on\; a\; une\; solution\; infinie: Stop, \\ \qquad Sinon\; I \leftarrow (I \setminus \{r\}) \cup \{s\}. \end{array} \tag{4}$$

On a déjà vu lors de l'étude du petit programme que lorsque l'on ne trouve pas de $r \in I$, alors $x(s)$ peut prendre une valeur $+\infty$. Comme $f(x) = f(I)\bar{b}(I) + \bar{f}(s)x(s)$, et que $\bar{f}(s) > 0$, la fonction économique prend elle aussi une valeur $+\infty$, et notre fonction est bien maximisée par cette valeur.

Théorème 2: Si les $x(r)$ rencontrés au cours de l'algorithme sont tous positifs, alors cet algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations avec une solution optimale de notre problème.

Démonstration

Appelons I_t la base de l'itération t de notre algorithme. Les valeurs des fonctions économiques des itérations t et $t+1$, diffèrent, exprimées dans la base I_t, de $\bar{f}(s)x(s)$. Le fait de repasser dans le "tant que" de notre algorithme implique $\bar{f}(s) > 0$, l'hypothèse du théorème précédent implique $x(s) > 0$. On a donc $\bar{f}(s)x(s) > 0$, et en notant x_t la solution (réalisable de base) de l'itération t on a :

$$f(C)x_t(C) < f(C)x_{t+1}(C).$$

Remarque 3: On ne peut pas rencontrer deux fois la même base (aux itérations t et $t+k$).

En effet, sinon on aurait :

$$f(C)x_t(C) = f(I_t)\bar{b}(I_t) = f(I_{t+k})\bar{b}(I_{t+k}) = f(C)x_{t+k}(C).$$

D'autre part on a :

$$f(C)x_t(C) < f(C)x_{t+1}(C) < \ldots < f(C)x_{t+k}(C)\ (= f(C)x_t(C)),$$

c'est une contradiction.

Comme le nombre de bases est fini ($< \binom{|L|}{|C|}$), on ne passe qu'un nombre fini de fois dans la boucle "tant que".

Remarque 4: On ne peut sortir de la boucle "tant que" que si sa condition n'est pas satisfaite. La solution ralisable de base correspondante satifait alors les conditions du théorème d'optimalité 1, ce qui démontre le théorème.

Un grand nombre d'arguments, dits de *non dégénérescence*, permettent de lever l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème 2. Nous ne les développerons pas ici.

2.4 Sommets et Solutions Réalisables de Base

Définition 5: Considérons, pour $i \in L$, $|L| < +\infty$, les demi-espaces D_i :

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}, \mathbb{A}(\sqsupset, \mathbb{C})\frown(\mathbb{C}) \leq (\sqsupset)\}.$$

On appelle polyèdre P l'intersection finie de ces demi-espaces.

$$P = \bigcap_{i \in L} D_i.$$

Un point $x \in P$ est dit intérieur, si $\forall i \in L,\ A(i,C)x(C) < b(i)$.

Un point $x \in P$ est dit point frontière, si $\exists i \in L, A(i,C)x(C) = b(i)$.

Un point $x \in P$ est dit point extrême, si $\forall y,z \in P,\ x \notin]y,z[$.

On va tout d'abord lier cette notion de point extrême avec celle de solution réalisable de base.

Théorème 3: Soit $P = \{x(C), A(L,C)x(C) = b(L), x(C) \geq 0\}$ un polyèdre. L'ensemble des points extrêmes de P coïncide avec l'ensemble des solutions réalisables de base distinctes du système :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) = b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases}$$

Preuve :
Soit $(x(I), 0)$ une solution réalisable de base :

$$x(I) = A(L,I)^{-1}b(L),\ x(C \setminus I) = 0.$$

Supposons qu'il existe $y \geq 0$ et $z \geq 0$ avec $A(L,C)y(C) = A(L,C)z(C) = b(L)$, et tels que $x(C) \in]y, z[$,

$$x(C) = \lambda y + \mu z,\ \ \lambda, \mu > 0.$$

Dans la base I on a donc nécessairement :

$$y(C) = (y(I), 0)\ et\ z(C) = (z(I), 0).$$

On a donc $x(C) = y(C) = z(C)$, une contradiction.

Inversement soit $x(C)$ un point extrême, montrons qu'il existe une base $\hat{I}$ telle que $x(C \setminus \hat{I}) = 0$.

Soit I une base quelconque, exprimons $x(C)$ dans cette base. Si $x(C \setminus I) = 0$, c'est une solution réalisable de base pour cette base I.

Sinon soit $j \in C \setminus I$ tel que $x(j) > 0$.

Si $x(j)$ peut à la fois croître et décroître la solution restant réalisable, on trouve deux solutions dont $x(C)$ est combinaison convexe, ce qui est impossible car $x(C)$ est point extrême. Dans un des deux sens au moins, tout accroissement implique un changement de base qui ne modifie pas la solution. Effectuons ce changement de base; il y a alors une variable hors base de plus nulle. Ce procédé se répète sans changer la solution, tant qu'il y a une variable hors base non nulle.

A la fin on a une base $\hat{I}$ telle que $x(C)$ est solution réalisable dans cette base. □

Théorème 4: Soit P un polyèdre borné, tout point $x(C)$ de P appartient à l'enveloppe convexe de ses points extrêmes et réciproquement.

Preuve :
On considère le polyèdre (borné) P défini par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) = b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Soit $X = \{x(k,C),\ k \in K\}$, l'ensemble de ses points extrêmes.

K qui a un nombre d'éléments au plus égal au nombre des bases réalisables est, bien entendu, fini.

Considérons une combinaison convexe $\hat{x}(C)$ de ces points extrêmes :

$$\hat{x}(C) = \sum_{k\in K} \lambda(k)x(k,C),\ avec \sum_{k\in K} \lambda(k) = 1,\ et\ \lambda(K) \geq 0.$$

On a donc :

$$A(L,C)\hat{x}(C) = b(L),\ et\ \hat{x}(C) \geq 0,$$

$\hat{x}(C)$ est donc solution de (5).

Inversement, soit $\hat{x}(C)$ une solution de notre système; nous allons montrer qu'il existe $J \subset K$ tel que :

$$\hat{x}(C) = \sum_{j\in J} \lambda(i)x(j,C),\ avec \sum_{j\in J} \lambda(j) = 1,\ et\ \lambda(J) > 0.$$

Exprimons $\hat{x}(C)$ dans une base I. Si $\forall i \in C \setminus I, \hat{x}(i) = 0$, $\hat{x}(C)$ est une solution réalisable de base, et donc le théorème est démontré.

Sinon, soit $s \in C \setminus I\ et\ \hat{x}(s) > 0$.

Considérons les deux solutions $\hat{x}^s(C)$ et $\hat{x}_s(C)$ obtenues en faisant croître, respectivement décroître $\hat{x}(s)$ du maximum possible. Les seules contraintes sur les variables de base (et sur $\hat{x}(s)$) étant les contraintes de non-négativité, on obtient dans les deux cas une nouvelle base contenant *une variable hors base de plus* nulle.

P étant borné, ces deux bases existent. Les solutions obtenues peuvent, éventuellement, être identiques. Les trois points $\hat{x}_s(C)$, $\hat{x}(C)$ et $\hat{x}^s(C)$ étant alignés, $\hat{x}(C)$ est combinaison convexe des deux autres. Les deux coefficients de cette combinaison sont, lorsque les deux points $\hat{x}_s(C)$ et $\hat{x}^s(C)$ sont différents :

$$(\hat{x}(s) - \hat{x}_s(s))/(\hat{x}^s(s) - \hat{x}_s(s))\ et\ (\hat{x}^s(s) - \hat{x}(s))/(\hat{x}^s(s) - \hat{x}_s(s)).$$

En répétant ce procédé à partir de $\hat{x}_s(C)$ et de $\hat{x}^s(C)$, on va obtenir des solutions ayant deux variables hors base nulles de plus que $\hat{x}(C)$, et ainsi de suite, pour obtenir enfin des solutions réalisables de base. $\hat{x}(C)$ sera donc combinaison convexe de ... de combinaisons convexes de ces solutions réalisables de base, et ce en nombre fini, et donc $\hat{x}(C)$ est combinaison convexe de solutions réalisables de base, ce qu'il fallait démontrer. □

On vient de voir que tout point d'un polyèdre borné est combinaison convexe de ses points extrêmes. En exprimant le point $\hat{x}(C)$, combinaison convexe de points extrêmes, comme l'ensemble des solutions d'un Programme linéaire en $\lambda(K)$, puis en remarquant que le nombre de colonnes d'une base d'un tel problème (borné) est $|C| + 1$, on démontre le théorème de Carathéodory [12]. Démontrons à présent le théorème de Weyl.

Théorème 5: L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polyèdre borné.

Preuve :

Soit $\hat{x}(C)$ solution du système :

$$\begin{cases} \lambda(K)x(K,C) = \hat{x}(C), \\ \sum_{k\in K} \lambda(k) = 1, \\ \lambda(K) \geq 0. \end{cases}$$

Cet ensemble d'inégalités définit un polyèdre en λ et $\hat{x}$. Ce polyèdre étant borné, l'algorithme de Fourier Kuhn Motzkin (voir plus loin 5.4), permet d'éliminer toutes les variables λ, et donc fournit un système d'inégalités en $\hat{x}$ auxquelles satisfait tout $\hat{x}$ satisfaisant les conditions du système précédent et réciproquement. Le théorème est donc démontré. □

3 Complexité et Polyèdres à sommets $0, 1$

En 1965 dans la section **Digression** de son article *Paths, Trees, and Flowers* [24], Jack Edmonds introduit la notion de *Complexité des Algorithmes*. Comme tout le monde le sait le but de cet article est de décrire un algorithme polynomial pour trouver un *Couplage* M maximum dans un graphe $G = (X, E)$.

Définition 6: Un ensemble d'arêtes $M \subset E$, est appelé *Couplage*, si $\forall e \neq e' \in M$, $e \cap e' = \emptyset$.

En fait, il y décrit un moyen de trouver l'arbre des chaînes augmentantes ayant pour origine un sommet insaturé donné.

Dans cette section, il introduit la notion *d'algorithme polynomial*. En particulier, il y justifie le fait que l'on puisse s'intéresser au fait qu'un algorithme soit *better-than-finite*.

Deux articles vont suivre [25] [26]. Dans le premier, Jack Edmonds décrit l'enveloppe convexe des fonctions caractéristiques des Couplages d'un graphe, il décrit donc un polyèdre dont les sommets ont des coordonnées $0, 1$; dans le second il introduit, entre autres la notion de problème $\mathcal{NP}$.

Définition 7: Un problème de décision (tel objet décrit par les données I a-t-il telle propriété) est dit $\mathcal{NP}$ s'il existe un algorithme polynomial permettant de **vérifier** si l'objet a bien cette propriété.

Cette simple chronologie nous montre que dès l'introduction de la notion (formelle) de complexité des algorithmes, Polyèdres Combinatoires et Algorithmes Polynomiaux sont liés.

3.1 Les Problèmes Combinatoires

Comment fait on correspondre un polyèdre à un problème combinatoire ?

Quels sont les problèmes combinatoires qui nous intéressent ?

Il s'agit des problèmes concernant un sous ensemble $\mathcal{F}$ de l'ensemble des parties, $\mathcal{P}(E)$, d'un ensemble fini E.

À un élément $F \in \mathcal{F}$, on fait correspondre sa *fonction caractéristique* $f \in \{0,1\}^E$.

$$\forall e \in F,\ f(e) = 1, \forall e \notin F,\ f(e) = 0.$$

Le polyèdre qui nous intéresse est l'enveloppe convexe des fonctions f. Pour ces enveloppes convexes on peut se restreindre à $\mathbb{Q}^{\mathbb{E}}$.

Il est trivial de remarquer que les sommets de ce polyèdre P sont en bijection avec les éléments $F \in \mathcal{F}$.

Dans l'algorithme décrit en [25] qui trouve le couplage M de *poids* $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ maximum, Jack Edmonds utilise intensivement ce polyèdre.

Parmi les résultats les plus intéressants sur les polyèdres combinatoires, il y a la description de l'enveloppe convexe des parties libres communes à deux matroïdes définis sur le même ensemble fini E.

3.2 Matroïdes

Définition 8: Soit E un ensemble fini, on appelle matroïde sur E le couple $M = (E, \mathcal{F})$, dans lequel $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, et dont les éléments, appelés libres ou indépendants, possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall e \in E,\ \{e\} \in \mathcal{F},\ (\textit{sinon on pourrait supprimer ces éléments de } E), \tag{6}$$

$$\forall F \in \mathcal{F},\ \forall F' \subset F,\ F' \in \mathcal{F}\ (\textit{hérédité}), \tag{7}$$

$$\forall A \subset E,\ \forall F, F' \subset A,\ |F| < |F'|,\ F, F' \in \mathcal{F},\ \exists e \in F' \setminus F,\ F \cup \{e\} \in \mathcal{F}\ (\textit{base incomplète}). \tag{8}$$

La notion de matroïde a été introduite en 1935 par Hasler Whitney [75] pour axiomatiser la notion d'indépendance linéaire. Le lecteur vérifiera aisément que lorsque E est l'ensemble des (indices de) colonnes d'une matrice $A(L, E)$ dont les éléments sont définis sur un corps K, l'ensemble F des sous ensembles $F \subset E$ libres (linéairement indépendants) des colonnes de $A(L, C)$ satisfait la définition précédente. Une question importante de cette théorie, mais tout à fait indépendante de notre sujet, était celle de l'existence de matroïdes qui ne puissent pas être représentés comme ceux des libres des colonnes de matrices.

Une réponse affirmative a été donnée à cette question par une construction à partir de la configuration de Désargues [70]. Voir par exemple J.C. Fournier [32] sur ce sujet.

On considère à présent deux structures de matroïdes sur le même ensemble E, $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ et $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$.

Les *Arborescences* d'un Graphe orienté $G = (X, U)$ sont un exemple important de cette structure.

Définition 9: Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, $r \in X$ un sommet particulier de G. Une Arborescence $A = (X, U')$ de racine r est un sous graphe de G tel que :

1. A est sans cycle,
2. $\forall x \in X,\ x \neq r,\ |\delta_+(x)| = 1,\ (\delta_+(x) = \{u \in U',\ u = (y, x)\})$.

Appelons $S(X, U)$ la matrice d'incidence de ce graphe orienté. Multipliée à droite par $\phi(U)$, les lignes de ce produit représentent les lois de conservation du $flot$ $\phi(U)$ en les sommets ($1^{ière}$ loi de Kirchhoff).

Appelons $B(X \setminus \{r\}, U)$ la matrice dont les éléments de la ligne x valent :

$$\forall u \in \delta_+(x),\ B(x, u) = 1,\ \forall u \notin \delta_+(x),\ B(x, u) = 0.$$

À une arborescence on peut faire correspondre deux matroïdes sur U :

1. $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{F}_1 = \{V \subset U,\ S(X,V)\, libre\}$,
2. $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_2 = \{V \subset U,\ B(X,V)\, libre\}$,

Remarque 5: Soit F une partie libre pour chacun des deux matroïdes, telle que $|F| = |X| - 1$ (elle est maximum).

La partie F correspond à une arborescence.

Avant de poursuivre l'étude de l'enveloppe convexe des (fonctions caractéristiques des) parties libres communes à deux structures de matroïdes sur E, introduisons une autre axiomatique des matroïdes, l'axiomatique du rang.

3.2.1 L'axiomatique du Rang

Pour $A \subset E$, $r(A) = \max_{F \subset A,\, F \in \mathcal{F}}(|F|)$. On appelle $r(A)$ le *rang* de A.

Théorème 6: Le troisième axiome de définition d'un matroïde (8) est équivalent au suivant :

$$\forall A, B \subset E,\ r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B). \tag{9}$$

Preuve :

Montrons que (9) implique (8).

Soient $F, F' \in \mathcal{F}, |F| < |F'|$. Posons $F' = (F \cap F') \cup G$. Par (9) on a :

$$r(F \cup G) + r(F' \cup G) \geq r(F \cup F' \cup G) + r((F \cap F') \cup G),$$

et donc :

$$r(F \cup G) \geq r(F \cup F') \geq r(F'),$$

et comme $|F| < |F'|$:

$$r(F \cup G) > |F|.$$

Montrons que cette dernière inégalité implique qu'il existe $e \in G$ tel que $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}$.

Supposons donc que $\forall e \in G, r(F \cup \{e\}) \leq r(F)$. Soient $e \neq e' \in G$, par (9) on a :

$$2r(F) \geq r(F \cup \{e\}) + r(F \cup \{e'\}) \geq r(F \cup \{e\} \cup \{e'\}) + r(F),\ d'où\ :$$

$$r(F) \geq r(F \cup \{e\} \cup \{e'\}).$$

On peut recommencer avec $e'' \neq e, e', \in G$, et de proche en proche on obtient :

$$r(F) \geq r(F \cup G) > |F|,$$

une contradiction. □

Inversement montrons que (8) entraine (9).

Preuve :
Supposons que l'on ait (8) et non (9) :

$$\forall A \subset E,\, \forall F, F' \subset A,\, |F| < |F'|,\, F, F' \in \mathcal{F},\, \exists e \in F' \setminus F,\, F \cup \{e\} \in \mathcal{F},$$

$$et\, \exists A, B \subset E,\, r(A) + r(B) < r(A \cup B) + r(A \cap B).$$

Soient F, respectivement F' deux libres maximaux de A, respectivement B, construits par (8) à partir d'un libre maximum G de $A \cap B$. On pose :

$$F = G \cup H,\, F' = G \cup H',\, r(A) = |G| + |H|,\, r(B) = |G| + |H'|.$$

On a donc : $|F \cup F'| = r(A) + r(B) - r(A \cap B)$.

Montrons que $r(A \cup B) = |F \cup F'|$.

Soit J un libre maximum de $A \cup B$ construit à partir de G. On a :

$$|J \cap A| \leq |F|,\, |J \cap B| \leq |F'|.$$

On peut poser $J \cap A = G \cup K$ et $J \cap B = G \cup K'$,et donc $r(A \cup B) \leq |F \cup F'|$, une contradiction avec l'hypothèse faite. □

3.2.2 Polyèdre des Libres Communs à deux Matroïdes

Théorème 7: L'enveloppe convexe des fonctions caractéristiques des parties libres communes aux deux matroïdes M_1 et M_2 est donnée par :

$$\begin{cases} \forall A \subset E,\, \sum_{e \in A} x(e) \leq Min(r_1(A), r_2(A)), \\ \forall e \in E,\, x(e) \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Preuve :
Soit $x(E)$ un sommet du polyèdre défini par les inégalités précédentes. Appelons I_1, respectivement I_2 l'ensemble de ces inégalités satisfaites à l'égalité en ce point $x(E)$ pour le matroïde M_1, respectivement M_2. Considérons deux inégalités A et B de I_1. On a :

$$\sum_{e\in A} x(e) = r_1(A), \sum_{e\in B} x(e) = r_1(B).$$

L'axiome (9) entraine :

$$r(A\cup B) + r(A\cap B) \leq \sum_{e\in A} x(e) + \sum_{e\in B} x(e) = r_1(A) + r_1(B).$$

Comme eqrefconv2 reste vrai, on a $\sum_{e\in A\cup B} x(e) = r_1(A\cup B)$ et $\sum_{e\in A\cap B} x(e) = r_1(A\cap B)$, et donc :

$$\sum_{e\in A\cup B} x(e) + \sum_{e\in A\cap B} x(e) \leq r_1(A\cup B) + r_1(A\cap B) \leq \sum_{e\in A} x(e) + \sum_{e\in B} x(e).$$

On a donc :

$$\sum_{e\in A\cup B} x(e) + \sum_{e\in A\cap B} x(e) = r_1(A\cup B) + r_1(A\cap B),$$

$$\sum_{e\in A\cup B} x(e) = r_1(A\cup B), \sum_{e\in A\cap B} x(e) = r_1(A\cap B).$$

Remarque 6: Ces deux dernières égalités sont équivalentes aux deux premières. De plus le support (ensemble des coefficients non nuls) de la seconde est inclus dans celui de la première.

Supposons donc que l'on ait pu trouver un système équivalent aux k premières égalités tel que le support de la $(j+1)^{ième}$ (nouvelle) égalité soit inclus dans celui de la $j^{ème}$. Montrons que l'on peut en déduire un système possédant la même propriété d'inclusion des supports,équivalent aux $k+1$ premières égalités.

Remarque 7: Soit C cette nouvelle égalité. Supposons que $B \subset A$, alors $(B\cup C) \subset (A\cup C)$, de même $(B\cap C) \subset (A\cap C)$.

Remarque 8: Soit à présent A l'égalité au plus grand support, B celle au plus petit, alors $(A\cap C) \subset (B\cup C)$.

En effet $(A \cap C) \subset C \subset (B \cup C)$.

À partir de ce système (d'égalités) on construit un nouveau système équivalent, par différence deux à deux de deux inégalités consécutives pour obtenir un système équivalent où les inégalités ont leurs supports disjoints.

On obtient ainsi deux systèmes d'égalités à supports disjoints. Un pour les égalités correspondant à chaque matroïde.

Ces deux systèmes sont ceux de la matrice d'incidence d'un *graphe biparti*, les seconds membres sont entiers, la solution $x(E)$ ne peut donc avoir que des coordonnées entières, et donc $\{0, 1\}$. $\square$

3.3 Le Polyèdre du Voyageur de Commerce

Le problème du Voyageur de Commerce est NP-Complet [46]. C'est aussi un problème de partie libre commune à trois matroïdes sur le même ensemble U.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Appelons $\delta_+(x, F)$, respectivement $\delta_-(x, F)$, $\delta_+(x, F) = \{u \in F,\ u = (y, x)\}$ est l'ensemble des arcs de F ayant leur extrémité en x, $\delta_-(x, F) = \{u \in F,\ u = (x, y)\}$ est l'ensemble des arcs de F ayant leur origine en x. Soit $T \subset U$ un arbre de G [7], appelons arbre à racine A les sous ensembles d'arcs de G formés d'un arbre et d'un arc, $A = T \cup \{u\}$, $u \notin T$. Sur son ensemble d'arcs U on va définir trois matroïdes :

$$M_1 = (U, \mathcal{F}_1),\ \mathcal{F}_1 = \{F \subset U,\ \forall x \in X,\ |\delta_+(x, F)| \leq 1\},$$

$$M_2 = (U, \mathcal{F}_2),\ \mathcal{F}_2 = \{F \subset U,\ \forall x \in X,\ |\delta_-(x, F)| \leq 1\},$$

$$M_3 = (U, \mathcal{F}_3),\ \mathcal{F}_3 = \{\exists A,\ F \subset A\}.$$

On vérifie que la définition du troisième matroïde satisfait l'axiome 8 de définition d'un matroïde.

Remarque 9: Les *cycles Hamiltoniens*, ceux qui permettent de définir un *tour* du voyageur de commerce, c'est à dire ceux qui passent par chacun des sommets une fois, correspondent aux parties F, libres communes à ces trois matroïdes, telles que $|F| = |X|$.

Remarque 10: On ne peut toutefois pas en déduire que le problème de la partie libre maximum commune à trois matroïdes définis sur le même ensemble E est $\mathcal{NP}$ – *Complet*. Il n'est d'ailleurs pas $\mathcal{NP}$. On ne sait pas donner dans le cas général la complexité du problème : Reconnaître si F est dans $\mathcal{F}$.

Remarque 11: Pour les mêmes raisons on n'a rien dit du problème de la partie libre maximum commune à deux matroïdes définis sur le même ensemble E.

Revenons au problème du voyageur de commerce sur un graphe $G = (X, E)$ non orienté. Dans le problème du voyageur de commerce, non seulement on veut obtenir un tour, mais le tour le plus court. Pour cela on définit des longueurs sur les arêtes :

$$\forall e \in E,\ l(e) \in \mathbb{Z}.$$

On peut alors considérer le graphe complet K_n. On étudie l'enveloppe convexe $\mathcal{P}$ des fonctions caractéristiques des cycles Hamiltoniens (CH en bref) du graphe complet.

Nous ne connaissons qu'une approximation de $\mathcal{P}$. Nous n'allons pas ici faire une étude complète des facettes connues de ce polyèdre, des ouvrages complets sont consacrés à ce sujet [49] [35], mais présenter les premiers résultats sur cette enveloppe convexe [20] [40] [41] [54] [38] [16].
Soit $S(X, E)$ la matrice d'incidence de G :

$$\forall e = \{x, y\},\ (ou\ \{y, x\}),\ S(x, e) = 1,\ \forall e = \{z, y\},\ S(x, e) = 0.$$

Un point $x(E)$ de $\mathcal{P}$ est, bien entendu, solution de l'équation matricielle :

$$S(X, E)x(E) = 2.$$

Théorème 8: [54] [38] Les fonctions caractéristiques des cycles Hamiltoniens du graphe complet engendrent la variété linéaire définie par $S(X, E)x(E) = 2$.

Preuve :
En d'autre termes il n'y a pas de plus petite variété linéaire contenant **tous** les CH du graphe complet.

Supposons donc que l'affirmation précédente ne soit pas vraie. Il existe donc une sous variété contenant tous les CH définie par :

$$S(X, E)x(E) = 2,$$
$$\alpha(E)x(E) = \beta.$$

Identifions l'ensemble X des sommets de G et $\{1, 2, \ldots, n\}$. Considérons le graphe $H = (X, F)$:

$$F = \{\{2,3\},\, e = \{1,i\},\, \forall i \in X\}.$$

Remarque 12: La matrice $S(X, F)$ est carrée et régulière.

Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que la matrice d'incidence d'un cycle de longueur 3 est régulière. Son déterminant vaut 2.

On peut donc avoir une égalité équivalente à $S(X, E)x(E) = 2$ en multipliant à gauche cette égalité par $S(X, F)^{-1}$, on obtient une égalité équivalente $\bar{S}(F, E)x(E) = \sigma$.

$\bar{S}(F, F)$ est une matrice identité. On peut ajouter des multiples des lignes de cette égalité à l'égalité $\alpha(E)x(E) = \beta$, de telle façon que $\forall e \in F,\ \alpha(e) = 0$. Cette dernière égalité se réécrit donc (avec les nouvelles valeurs des α et de β) :

$$0(F)x(F) + \alpha(E \setminus F)x(E \setminus F) = \beta.$$

Considérons les deux cycles Hamiltoniens partageant la même chaîne entre le sommet 3 et le sommet i, et respectivement les arêtes :($\{3,1\}, \{1,2\}, \{2,i\}$), et ($\{3,2\}, \{2,1\}$, $\{1,i\}$). Les fonctions caractéristiques de ces deux CH satisfont cette égalité. Écrivons l'égalité des valeurs de ces fonctions. Nous n'écrivons pas la valeur sur les chaînes communes. On a :

$$\alpha_{\{3,1\}} + \alpha_{\{1,2\}} + \alpha_{\{2,i\}} = \alpha_{\{3,2\}} + \alpha_{\{2,1\}} + \alpha_{\{1,i\}}.$$

On a donc, compte tenu des valeurs des α, $\alpha_{\{2,i\}} = 0$.

On recommence en faisant jouer aux sommets $1, 2, i, j$ les rôles respectifs des sommets $3, 1, 2, i$, et par le même raisonnement on obtient $\alpha_{\{i,j\}} = 0$. On a donc aussi $\beta = 0$.

Il n'y a donc pas de sous variété propre à celle définie par $S(X, E)x(E) = 2$. □

On sait donc que notre polyèdre va satisfaire aux conditions du système suivant :

$$\begin{cases} S(X, E)x(E) = 2, \\ 0 \le x(E). \end{cases} \tag{11}$$

Le polyèdre défini par ces inégalités a tous ses sommets entiers. En fait les matrices de base se décomposent en blocs de déterminant ± 2.

Les *1-facteurs* sont les couplages. Lorsque l'on rajoute la condition $x(E) \le 1$, les solutions réalisables de base ne sont plus entières, le facteur $1/2$ (inverse des sous déterminants) intervient. On doit ajouter des inégalités analogues à celles du polyèdre du couplage pour obtenir les *2-facteurs* comme solutions.

Décrivons à présent une première classe de facettes du polyèdre du voyageur de commerce :

$$\forall Y,\ \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X,\ \sum_{e \in E(Y)} x(e) \leq |Y| - 1, \tag{12}$$

on appelle ces inégalités *subtour elimination constraints.*

Pour décrire la deuxième classe, considérons les ensembles, W_0, et $\forall i,\ 1 \leq i \leq p$, W_i *et* Y_i, définis de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} \forall i,\ 0 \leq i \leq p,\ W_i \subset X, \\ \forall i > 0,\ W_i \cap W_0 = \{z_i\}, \\ Y_i = W_i \setminus \{z_i\}. \end{array}$$

Des égalités (11) on peut déduire l'inégalité suivante :

$$\sum_{e \in E(W_0)} 2x(e) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{e \in W_i \setminus Y_i} x(e) \leq 2|W_0|.$$

Pour $i > 0$, écrivons les inégalités (12) pour W_i et Y_i :

$$\sum_{e \in E(W_i)} x(e) \leq |W_i| - 1,\ \sum_{e \in E(Y_i)} x(e) \leq |W_i| - 2.$$

En sommant les inégalités précédentes, on obtient :

$$2 \sum_{e \in E(W_0)} x(e) + 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{e \in W_i,} x(e) \leq 2|W_0| + \sum_{i=1}^{p} (|W_i| - 1) + \sum_{i=1}^{p} (|W_i| - 2).$$

Lorsque p est impair la division par 2 du second membre donne une inégalité valide, mais comme le premier membre est entier on obtient :

$$\sum_{e \in E(W_0)} x(e) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{e \in W_i,} x(e) \leq |W_0| + \sum_{i=1}^{p} (|W_i| - 1) - \lceil p/2 \rceil.$$

Ces nouvelles inégalités sont appelées peignes par Chvátal [13].

3.4 Généralisation aux Polyèdres de $\mathbb{Z}^{\mathbb{C}}$

Dans ce même article Chvátal [13] généralise cette opération de production d'inégalités valides.

Soit K un ensemble de points de $\mathbb{Z}^{\mathbb{C}}$ en position générale, défini sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{C}}$ par le système $A(L,C)x(C) \leq b(L)$ à coefficients entiers. Soit :

$$\sum_{l \in L} \lambda(l) A(L,C) x(C) \leq \sum_{l \in L} \lambda(l) b(L), \;\; \lambda(l) \in \mathbb{Z}, \;\; \lambda(\lessdot) \geq \nvdash.$$

Réécrivons $\alpha(C)x(C) \leq \beta$ cette inégalité.

Supposons que $\forall c \in C, \; \alpha(c)/r = p(c) \in \mathbb{Z}$, et que $\beta/r \notin \mathbb{Z}$.

On obtient alors une nouvelle inégalité valide :

$$p(C)x(C) \leq \lfloor \beta/r \rfloor.$$

Il y démontre alors le théorème suivant (voir aussi Schrijver [67]) :

Théorème 9: Une description par des inégalités de l'enveloppe convexe P des points de K s'obtient par application, un nombre fini de fois, de la règle de production précédente.

Remarque 13: Le théorème précédent implique que parmi les inégalités produites se trouvent celles dont les plans supports donnent des facettes. Il peut, bien entendu, y en avoir beaucoup d'autres.

Citons dans ce contexe Hilbert [42] qui donne le théorème d'existence d'une base finie pour les polynômes arithmétiques. Citons aussi Jeroslow [43] qui décrit un théorème analogue pour le treillis des points à coordonnées entières d'un cône.

3.5 D'autres Polyèdres

Soit $G = (X,E)$ un graphe, les cycles Hamiltoniens sont les plus longs cycles (élémentaires) de G. Un autre problème concerne les *cocycles* (cutset):

$$\omega(Y) = \{e \in E, \; e = \{x,y\}, \; x \in Y, y \in X \setminus Y, \; ou \;\; y \in Y, x \in X \setminus Y\}.$$

Nous ne décrirons pas ici les résultats concernant le polyèdre P de $\mathbb{R}^{\mathbb{E}}$, enveloppe convexe des cocycles, mais nous donnerons simplement une classe d'inégalités valides exprimant que *tout cocycle rencontre tout cycle en un nombre pair d'arêtes.*

Soit E un ensemble fini, considérons les fonctions caractéristiques des parties $F \subset E$ telles que $|F|$ est pair. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces parties.

Théorème 10: L'enveloppe convexe des fonction caractéristiques des éléments de $\mathcal{F}$ est donnée par [11] :

$$\begin{cases} \forall S \subset E,\ |S|\ impair,\ \sum_{e\in S} x(e) - \sum_{e\in E\setminus S} x(e) \leq |S|-1, \\ 0 \leq x(E) \leq 1. \end{cases} \tag{13}$$

Une classe d'inégalités valides du cutset Polytope s'obtient pour chaque cycle γ à partir des inégalités (13) :

$$\forall S \subset \gamma,\ |S|\ impair,\ \sum_{e\in S} x(e) - \sum_{e\in E\setminus S} x(e) \leq |S|-1.$$

Ce polytope a été intensivement étudié [3], [23], [22] [50].

Le résultat sur les parties paires se généralise aux partie libres d'un matroïde de cardinal dans un sous ensemble de $\mathbb{N}$ [55].

Terminons cette section par la remarque suivante :

Remarque 14: Les Polyèdres que nous venons de considérer ont souvent un nombre de sommets et de facettes non polynomial dans la dimension de l'espace.

4 Les Méthodes Intérieures

Le théorème de la *Dualité* des Programmes Linéaires permet de *réduire Polynomialement* (Linéairement), le problème d'optimisation (1) :

$$\begin{cases} \max f(C)x(C), \\ A(L,C)x(C) = b(L), \\ x(C) \geq 0, \end{cases}$$

au problème d'existence de solution suivant :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) = b(L), \\ y(L)A(L,C) \geq f(C), \\ f(C)x(C) \geq y(L)b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases}$$

La plupart du temps, on utilise la méthode simplex pour trouver une solution aux problèmes de cette forme, soit après réécriture :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) \leq b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

À la fin des années 70, des algorithmes polynomiaux sont apparus pour résoudre ce type de problème. Énonçons tout d'abord un théorème.

Soit P le polyèdre défini par le système précédent (14). Pour $\epsilon > 0$ appelons P_ϵ le polyèdre défini par le système suivant :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) \leq b(L) + \epsilon, \\ x(C) \geq -\epsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Théorème 11: Il existe une valeur de ϵ pour que l'affirmation suivante soit vraie :

$$(P \neq \emptyset) \Leftrightarrow (P_\epsilon \neq \emptyset).$$

Lorsque l'on suppose que les données sont entières, bornées par M, que $|L| = m$ et $|C| = n$, on peut même donner une valeur à ϵ, $\epsilon = 1/\alpha$, avec $\alpha = 2nM^{2m}m^m$.

La démonstration de ce théorème est *polynomialement constructive*, c'est à dire, qu'a partir d'une solution des inégalités définissant P_ϵ, on construit en $n-m$ étapes de la méthode simplex 4 une solution réalisable de base pour une base I. On démontre que cette base I est aussi réalisable de base pour les inégalités définissant P. On calcule donc polynomialement [27] la solution correspondant à cette base I.

Remarque 15: Lorsque le système d'inégalités définissant P est connu, on peut se ramener à un problème pour lequel le polyèdre P_ϵ a un intérieur non vide.

4.1 Résolution d'inégalités par Projection

Au début des années 50 un algorithme de résolution de système d'inégalités apparaît simultanément, dans deux articles de différents chercheurs du même institut [1] [63] ...

On considère un polyèdre P et un point x_i. Lorsque $x_i \notin P$, on construit x_{i+1} de la façon suivante :
Appelons $D_j = \{c \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}},\ \mathbb{A}(\gimel,\mathbb{C})(\mathbb{C}) \leq (\gimel)\}$, et soit D_j, un demi espace, tel que $x_i \notin D_j$. Appelons H_j le plan définissant D_j. Appelons y_i la projection orthogonale de x_i sur H_j. On a :

$$x_{i+1} = x_i + \alpha(y_i - x_i).$$

Théorème 12: Pour tout α tel que $0 \leq \alpha < 1$, la suite des x_i converge vers le polyèdre P.

En 1954 la notion de complexité des algorithmes n'est pas encore dégagée, les polyèdres sur lesquels les auteurs travaillent sont des polyèdres quelconques de $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$, ils ne sont pas *représentés*, c'est à dire qu'on ne s'intéresse pas à la description de ces polyèdres, et pas non plus à la *longueur d'écriture au moyen d'un alphabet fini* de ces polyèdres.

Cet algorithme, moyennant l'observation du théorème 11, recèle cependant un procédé constructif fini, et, dans certains cas, polynomial. C'est ce que nous avons observé en [56] [57] [59].

Supposons que le polyèdre P contienne un point $\bar{x}$ à une distance supérieure ou égale à ϵ de tous les plans H_j. Notons $|y_i - x_i|_2$ la norme euclidienne du vecteur joignant les points x_i et y_i. Remplaçons la construction précédente par :

$$x_{i+1} = y_i + \epsilon(y_i - x_i)/|y_i - x_i|_2.$$

Soit M une borne supérieure de la distance entre x_0, l'origine par exemple, et $\bar{x}$. Appelons d_i la distance entre x_i et $\bar{x}$. Dans ces conditions on a :

Remarque 16: À chaque itération, cette distance d_i décroît au moins de $\epsilon^2/2M$.

C'est une application immédiate du théorème de Pythagore.

Remarque 17: Lorsque le polyèdre P possède un tel point $\bar{x}$, en au plus $2M^2/\epsilon^2$ applications de la construction précédente on obtient un point de P, et donc une solution de notre système d'inégalités définissant P.

Soit S un sysème fini d'inégalités. Par la remarque 11 on peut transformer ce système en un système S_ϵ.

1. Ou bien cet algorithme nous donne une solution de S_ϵ, et donc par la construction (polynomiale) de la démonstration de 11 une solution de S;
2. Ou bien, au bout de $2M^2/\epsilon^2$ itérations, on peut affirmer que S n'a pas de solution.

On illustre cette construction sur la figure 1.

Lorsque à la fois M et ϵ sont de **valeur** polynomiale l'algorithme décrit précédemment est polynomial. On peut toutefois relâcher la condition M de valeur polynomiale, par des techniques de *mise à l'échelle* (scaling) du type de celles décrites dans [28].

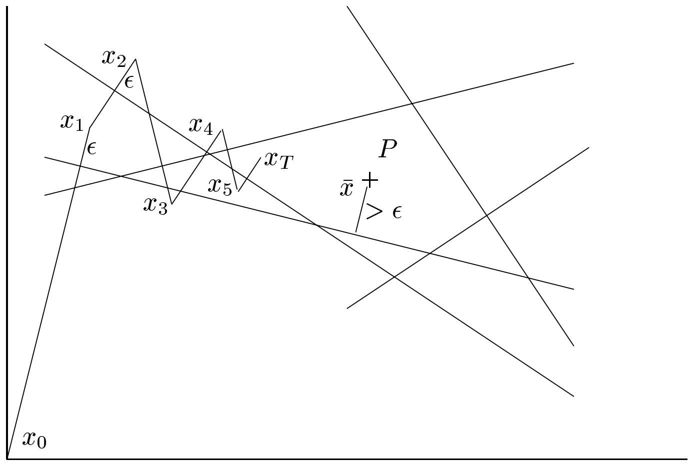

Fig. 1: Solution par projections

4.2 Résolution par suite d'ellipsoïdes, l'algorithme de Khachiyan

Soit $E = (M, c)$ un ellipsoïde. M est une matrice définie positive, diagonale lorsqu'il est ramené à ses axes, c est le centre de E. Dans ce cas :

$$E = \{x(C), \sum_{i \in C} \frac{x(i)^2}{a(i,i)} \leq 1\}.$$

Sinon on a :

$$E = \{x(C), {}^t(x(C) - c(C))M^{-1}(C,C)(x(C) - c(C)) \leq 1\}.$$

On a une bonne représentation de cet algorithme dans le plan. Dans ce cas ellipsoïde est remplacé par ellipse. Comme pour les ellipses, projection de cercles, les ellipsoïdes peuvent être obtenus par projection de sphères. De plus les projections respectent les rapports des volumes.

Soit E_2 le demi ellipsoïde intersection de E et du demi espace D_j. Soit y le point de contact de E et du plan H'_j, parallèle à H_j, contenu dans D_j. Considérons les ellipsoïdes contenant E_2, s'appuyant sur $E \cap H'_j$ et tangent à E en y. Ils ont leurs centres sur la droite c, y.

Soit $n = |C|$, cet algorithme est basé sur la remarque suivante :

Remarque 18: Soit v le volume de E, v' celui de l'ellipsoïde E', de la famille précédente, et donc contenant E_2, de plus petit volume. On a :

$$v/v' \approx 1 + 1/2n,$$

soit v_{2n} le volume de l'ellipsoïde obtenu par $2n$ répétitions de la construction précédente, on a donc :

$$v/v_{2n} \approx e\,(2,718281828\ldots).$$

On voit que le centre c_i de l'ellipsoïde courant E_i joue ici le rôle du point courant x_i. Lorsque ce point n'appartient pas à P il y a (au moins) un demi espace D_j qui nous permet d'effectuer la construction de E_{i+1}. Le facteur e observé au bout de $2n$ itérations implique la polynomialité de cette construction. Cette construction est illustrée sur la figure 2.

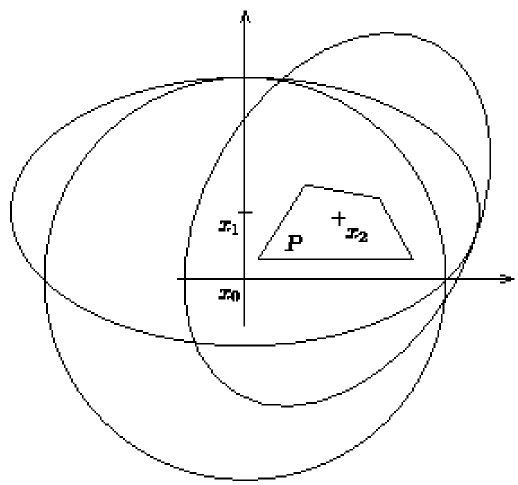

Fig. 2: Solution par ellipsoïdes

Pour alléger ici les notations écrivons a_j et non $A(j, C)$, le premier membre de l'inégalité non satisfaite par le centre c_i. On peut prendre les formules suivantes pour donner les éléments du nouvel ellipsoïde :

$$M_{i+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left(M_i - \frac{2}{n+1}\frac{M_i a_j^t a_j M_i}{a_j M_i a_j^t}\right),$$

$$c_{i+1}(C) = c_i(C) - \frac{1}{n+1}\frac{M_i a_j^t}{\sqrt{a_j M_i a_j^t}}.$$

4.3 Séparation et Optimisation

D'autres algorithmes polynomiaux ont été proposés depuis Khachiyan pour résoudre les programmes linéaires. Certains sont peut-être mêmes assez efficaces dans la pratique [45]. Les algorithmes que nous avons cités ont cependant des conséquences théoriques importantes que nous allons évoquer ici.

Définition 10: On appelle *oracle* un algorithme qui pour une certaine donnée particulière I fournit une solution S. En général le corps de l'algorithme n'est pas spécifié.

Définition 11: Un oracle est dit polynomial si l'on suppose que l'algorithme non spécifié est polynomial. Un tel algorithme peut, et c'est souvent le cas, ne jamais avoir été décrit.

Soit P un polyèdre dont on sait seulement qu'il existe. Pour fixer les idées, P peut être l'enveloppe convexe des fonctions caractéristiques des *cliques* (sous graphes complets) d'un graphe donné $G = (X, E)$.

Soit $x(E)$ un point. Supposons que l'on dispose d'un oracle SEP (séparateur) qui fournisse l'une des deux réponses suivantes :

1. le point $x(E)$ est dans P,
2. le plan $H = \{y(E), h(E)y(E) = b\}$ tel que $\forall y(E) \in P, h(E)y(E) \leq b, h(E)x(E) > b$.

Théorème 13: [48] [36] [37] [68] Si l'oracle SEP est polynomial, alors il existe un algorithme polynomial (que l'on sait décrire) pour maximiser une fonction linéaire sur le polyèdre P.

En [61] nous avons donné une démonstration *élémentaire* de ce résultat dans le cas où la réponse de l'oracle ne dépend que du polyèdre. Cette preuve est indépendante de la dimension du polyèdre P ($dim(P) \leq |C|$). Nous allons essayer de l'illustrer ici. Le point de départ est la remarque suivante :

Supposons que notre oracle fournisse une représentation en entiers du plan H de longueur, en base 10 au plus k.

Remarque 19: Si H est à une distance de P plus petite que $\epsilon = 10^{-10k}$, alors H est un hyperplan *support* de P. C'est à dire le plan H touche (a une intersection non vide avec) le polyèdre P.

Preuve :
En toute généralité, on peut supposer que le polyèdre P s'écrit au moyen d'inégalités de longueur d'écriture, sous le même format, au plus k. On peut faire la même hypothèse pour les sommets, quitte, une fois pour toute, à remplacer k par k^2 ou k^3.

Pour les sommets on dispose aussi du dénominateur commun q.

Appelons H' le plan parallèle à H touchant le polyèdre P (le plus proche de H) au sommet $z(E)$, $H' = \{y(E), h(E)y(E) = b'\}$, avec $b' = h(E)z(E)$, et a , ici, un dénominateur q.

Ecrivons $b' = (p, q)$ et $b = (b, 1)$. On a $b - b' \leq \epsilon$, et donc $b = b' + \epsilon'$, avec $\epsilon' \leq \epsilon$.

Ecrivons $\epsilon' = (r, s)$, et donc $s \geq 10^{10k}$.

On a donc $b = (ps - qr, qs)$.

Remarque 20: Les deux termes de b ne peuvent pas être simplifiés par un facteur t de longueur plus grande que $5k$.

Sinon, q étant de longueur au plus k, un facteur t' de longueur $4k$ divise s. Ce nombre t' qui divise s, divise donc qr. Il est premier avec r, il divise donc q. Comme q est de longueur k au plus, il ne peut pas avoir de diviseur de longueur $5k$.

On vient de prouver que le dénominateur de b est au moins de longueur $5k$, une contradiction.

H est donc un hyperplan support de P. □

Considérons un polyèdre P pour lequel on connaît un oracle SEP séparateur. Il est assez facile de montrer le théorème suivant :

Théorème 14: On considère l'algorithme de Khachiyan pour lequel le plan H_j est donné par l'oracle SEP polynomial. De deux choses l'une :

1. ou bien au bout d'un nombre polynomial d'appels de SEP on obtient un centre d'ellipsoïde c_i appartenant à P;
2. ou bien au bout d'un nombre polynomial d'appels de SEP le plan H_j fourni est à une distance de P inférieure à 10^{-10k}.

Pour déterminer le plan dans ce dernier cas, il suffit de suveiller le déplacement du centre de l'ellipsoïde E. Lorsque ce déplacement est de valeur inférieure à $10^{-10k}/|C|$, le plan qui a provoqué ce déplacement est un plan support de P.

La preuve de ce résultat se fait simplement par considération de *normes* ou, dit plus simplement, en estimant les plus grandes valeurs propres des matrices M.

On se place alors dans le polyèdre $P_1 = P \cap H$.

Soit alors H' un plan séparateur d'un point $x(C) \in H$ est P.

Remarque 21: Il est clair que $H' \cap H$ est un plan séparateur, dans la variété linéaire définie par le plan H, pour le point $x(C)$ et le polyèdre P_1. De plus si l'oracle fournissant H est polynomial, l'oracle fournissant $H' \cap H$ l'est aussi. Ceci reste vrai lorsque l'on remplace H par une variété linéaire quelconque.

Une conséquence de ce résultat est :

Théorème 15: Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, il n'y a pas d'oracle séparateur SEP pour le polyèdre du voyageur de commerce.

4.4 D'optimisation vers Séparation, Polarité

Soit P un polyèdre borné à intérieur non vide contenant l'origine des coordonnées en son intérieur.

$$P = \{x(C),\ A(L,C)x(C) \leq b(L)\}.$$

Dans ce cas $b(L) > 0$. Soit $\mathbf{1(L)}$, le vecteur indicé par L dont toutes les composantes valent 1. On a une représentation équivalente de P par :

$$P = \{x(C),\ A'(L,C)x(C) \leq \mathbf{1(L)}\}.$$

Remarque 22: Bien entendu les sommets de P sont les mêmes pour les deux écritures, P est inchangé.

Soit $B(L',C)$ la matrice dont les lignes sont (tous) les sommets de P. Soit Q le polyèdre suivant :

$$Q = \{y(C),\ B(L',C)y(C) \leq \mathbf{1(L')}\}.$$

Il est facile de montrer :

Théorème 16: Les sommets de Q sont (toutes) les lignes de $A'(L,C)$. On appelle le polyèdre Q le *polaire* de P.

Soit O un oracle polynomial maximisant une fonction linéaire sur P, et soit $x(C)$ un point de l'espace. Par considération du polyèdre polaire on montre aussi :

Théorème 17: Il y a un algorithme polynomial (que l'on sait construire) pour séparer $x(C)$ et P.

4.5 Utilisations Pratiques, Relaxations

Considérons le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} \max f(C)x(C), \\ A(L,C)x(C) \leq b(L), \\ x(C) \geq 0. \end{cases}$$

Soit $I \subset L$, considérons le problème :

$$(P_I)\begin{cases} \max f(C)x(C), \\ A(I,C)x(C) \leq b(I), \\ x(C) \geq 0. \end{cases}$$

Remarque 23: Soit $\bar{x}(C)$ une solution optimale de P_I, si de plus $A(L,C)\bar{x}(C) \leq b(L)$, $\bar{x}(C)$ est solution optimale de P.

Appelons $J_i = \{l \in L,\ A(l,C)x(C) > b(l)\}$.

Lorsque $J_i \neq \emptyset$, soit $J'_i \neq \emptyset,\ J'_i \subset J_i$.

Soit $y(l)$ la variable d'écart de l'inégalité $l \in L$.

Appelons $I^e_i = \{l \in I_i,\ y(l)\ \textit{de base à l'optimum}\}$. Soit $K_i \subset I^e_i$. Soit $I_0 \subset L$. On résoud P_{I_0}. On a alors l'algorithme suivant pour résoudre P :

$Tant\ que\ J_i \neq \emptyset\ faire$
 $Soit\ I_{i+1} = (I_i \setminus K_i) \cup J'_i,$
 $i \leftarrow i+1,$
 $Résoudre\ P_{I_i}.$

Remarque 24: Si les fonctions économiques décroissent strictement, le nombre de passages dans la boucle *Tant que* est fini.

On peut lever l'hypothèse de la remarque précédente. Dans la pratique, ce nombre est en général petit. De plus le nombre de contraintes (effectivement) prises en compte est souvent *très* petit.

Remarque 25: Dans l'algorithme précédent, on n'a pas besoin de connaître explicitement toutes les inégalités $A(l,C)x(C) \leq b(l)$, un **Oracle** polynomial peut nous les donner. C'est ce qui est fait pour résoudre la relaxation du problème du voyageur de commerce composé des seules contraintes :

$$\begin{cases} \max f(C)x(C), \\ S(L,C)x(C) \leq b(L), \\ \forall Y,\, \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X,\, \sum_{e \in E(Y)} x(e) \leq |Y| - 1, \\ 0 \leq x(C) \leq 1. \end{cases}$$

Le problème de reconnaître les inégalités violées se réduit ici au problème du flot maximum dans un graphe.

5 Conclusion

5.1 Les polyèdres dont nous n'avons pas parlé

Nous n'avons parlé, ni du polyèdre des *cliques* d'un graphe, ni de celui des *stables*.

Définition 12: Soit $G = (X, E)$ un graphe, pour $Y \subset X$, notons $E(Y) = \{e = \{x,y\},\, x,y \in Y\}$.

On appelle clique un sous ensemble de sommets Y tel que :

$$\forall x, y \in Y,\, \exists e \in E,\, e = \{x, y\},$$

$$\omega(G) = Max_{Y \subset X}|Y|.$$

On appelle stable un sous ensemble de sommets Y tel que :

$$E(Y) = \emptyset,$$

$$\alpha(G) = Max_{Y \subset X}|Y|.$$

Soit $Y_j, j \in J$, une partition des sommets en cliques. On définit $\theta(G) = Min|J|$.

Définition 13: Soit $G = (X, E)$ un graphe, on appelle coloration des sommets de G une partition des sommets en stables $Y_i, i \in I$.

$$\gamma(G) = Min|I|.$$

Soit $K_X = (X, E_{K_X})$ le graphe complet sur X, et soit $G = (X, E)$ un graphe. On appelle complémentaire de G le graphe $\bar{G} = (X, \bar{E})$ tel que $\bar{E} = E_{K_X} \setminus E$.

Les sommets d'une même couleur forment un stable, et donc :

$$\gamma(G) \geq \omega(G).$$

De même $\alpha(G) \leq \theta(G)$.

Définition 14: Un graphe $G = (X, E)$ est dit $\alpha - parfait$ (resp.$\gamma - parfait$) si pour lui et tous ses sous graphes induits on a :

$$\alpha(G) = \theta(G)\ (resp.\ \gamma(G) = \omega(G)).$$

En 1970 Lovász [51] montre qu'un graphe est $\alpha - parfait$ ssi il est $\gamma - parfait$. Il résoud ainsi la première partie d'une conjecture célèbre de Berge Gilmore [5].

Soit $A(L, C)$ une matrice telle que $\forall l \in L,\ c \in C,\ A(l, c) \in \{0, 1\}$. considérons les polyèdres définis par :

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) \geq 1, \\ 0 \leq x(C). \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} A(L,C)x(C) \leq 1, \\ 0 \leq x(C). \end{cases} \tag{17}$$

Définition 15: La matrice $A(L, C)$ est dite idéale, respectivement parfaite, si le polyèdre défini par les inégalités (16), respectivement (17) précédentes a tous ses sommets entiers (et donc $0, 1$ à cause de second membre 1).

Théorème 18: [51] Les matrices d'incidence des cliques d'un graphe parfait sont parfaites.

Remarque 26: [51] Les notions de Matrices parfaites et idéales coïncident, bien entendu, pour les matrices, $0, 1$, totalement unimodulaires.

La situation de ces polyèdres (attachés aux matrices parfaites) est curieuse car on ne sait pas, actuellement, reconnaître (en temps polynomial) les matrices parfaites. Ces matrices [15] généralisent les matrices *totalement unimodulaires* (tous les sous déterminants valent -1, 0, *ou* 1) [10] [30], ainsi que les matrices Balancées [6].

En 1978 on avait le même problème avec les matrices totalement unimodulaires. Le théorème de Seymour [71], et l'algorithme d'Edmonds et Cunningham [17] ont levé cette difficulté.

Citons pour finir le travail de Abdellah Ben Rebea [4] qui a caractérisé l'enveloppe convexe des stables des graphes *Quasi Adjoints*.

Définition 16: Soit $G = (X, E)$ un graphe, on appelle Line graph (Graphe adjoint) de G le graphe $G' = (E, H)$, $H = \{h = \{e, d\},\ e, d \in E,\ e \cap d \neq \emptyset\}$.

Définition 17: Soit $G = (X, E)$ un graphe, appelons $\Gamma(x) = \{y \in X,\ \exists e \in E,\ e = \{x, y\}\}$. G est dit Presque Biparti [55] [58] si $\forall x \in X$, $G' = (X \setminus \Gamma(x), E(X \setminus \Gamma(x)))$ est biparti.

Les graphes Quasi Adjoints sont les complémentaires au sens des arêtes des graphes presque bipartis.

Les graphes adjoints sont quasi adjoints.

Les problèmes sur les stables dans ces graphes sont donc une généralisation de ceux de couplage sur un graphe.

Citons aussi l'article de Vasek Chvátal et Najiba Sbihi [14] dédié à la mémoire d'Abdellah Ben Rebea.

5.2 Les Résultats dont nous n'avons pas parlé

On n'a pas cité les noms de Gomory [33] [34] et de Bradley [9].

Au début des années 70 un l'article de Bradley propose de réduire un problème en nombres entiers ayant plusieurs contraintes à un problème d'une seule contrainte. Les notions de *complexité* et de *réduction* sont assez peu familières à l'époque, et certains ont pu avoir l'espoir de *simplifier* le problème par une telle agrégation. L'article de Veselov et Shevchenko [72] met un point final à cet essai en montrant que les coefficients agrégés ont une croissance exponentielle.

On doit ranger dans un registre semblable les résultats de Gomory. Ces travaux sont précédés par une observation de Dantzig [19] :

Remarque 27: Soit $I \subset C$ une base optimale d'un programme linéaire. Si la solution correspondante n'est pas entière, une solution entière optimale satisfait nécessairement l'inégalité :

$$\sum_{i \in C \setminus I} s(i) \geq 1.$$

Gomory généralise cette observation en considérant le déterminant de la base et les coefficients des lignes du *tableau* des variables hors base, et propose un algorithme dont il peut prouver *l'optimalité finie*.

Les performances pratiques de la méthode simplex qui en ont fait son succès avant même l'existence de preuves théoriques de son efficacité [8] [69], lui ont laissé espérer des performances analogues pour cet algorithme dont les performances sont imprévisibles et souvent mauvaises. Il existe cependant des cas de résultats très satisfaisants.

Nous n'avons pas parlé de l'algorithme dit LLL [52] qui permet, entre autres, de retrouver les solutions rationnelles exactes à partir de solutions approchées. Nous résolvons ce problème en utilisant une variante de la Méthode Simplex (4).

Nous n'avons parlé qu'indirectement, et dans des cas particuliers, des méthodes de *production* de nouvelles inégalités valides et de facettes. Les plus étudiées sont le *lifting*, déduire une inégalité à l'ordre $n+1$ d'une inégalité à l'ordre n, et la *composition d'inégalités*, à partir de deux inégalités en produire une troisième.

5.3 Les Croyances

Les motivations de notre communauté sont à la fois théoriques et pratiques.

Du coté des praticiens, des classes de méthodes heuristiques se sont développées citons :

1. Le recuit simulé;
2. Les algorithmes Tabu;
3. Les algorithmes génétiques.

Les méthodes exactes ont cependant toujours leurs adeptes et sembles adaptées à certains types de problèmes :

1. Les problèmes de flots;
2. Les problèmes de multiflots.

Il y a aussi des challenges à relever, avec, par exemple, la taille d'un tour du voyageur de commerce. Le record actuel est à plus de 2000 villes ...

Ces méthodes exactes peuvent servir de base à des algorithmes de *Branch and Cut*. Pour ceux-ci on a besoin de coupes (Cuts) efficaces. On utilise souvent celles trouvées dans les résolutions plus ou moins complètes des problèmes théoriques.

Du coté théorique la *croyance* qui me semble dominer est que :

1. La connaissance du polyèdre (lié au problème combinatoire considéré) rend le problème (presque) résolu;

2. Inversement, pour un problème résolu au moyen d'un algorithme polynomial, le polyèdre correspondant devrait être connu.

Il n'est pas du tout évident de reconnaître, lorsqu'on connaît sa forme, une inégalité violée. On peut imaginer que ce problème soit aussi difficile que celui que l'on veut résoudre.

Malgré tous ces obstacles, on *feint de croire* qu'une connaissance complète du polyèdre du voyageur de commerce impliquerait $(\mathcal{P} = \mathcal{NP})$.

5.4 Les Espoirs

Revenons à l'algorithme de Fourier [31]. Considérons le système d'inégalités :

$$S = \{x(C) \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}},\ \mathbb{A}(\mathbb{L}, \mathbb{C})\frown(\mathbb{C}) \leq (\mathbb{L})\}.$$

Soit $c \in C$, appelons :

$$L_{c-} = \{l \in L, A(l,c) < 0\},$$

$$L_{c0} = \{l \in L, A(l,c) = 0\},$$

$$L_{c+} = \{l \in L, A(l,c) > 0\}.$$

Considérons le système $S^{\{c\}}$:

$$S^{\{c\}} \begin{cases} A(L_{c0}, C \setminus \{c\})x(C \setminus \{c\}) \leq b(L_{c0}), \\ \forall l_- \in L_{c-},\ \forall l_+ \in L_{c+}, \\ (\frac{A(L_{c-}, C\setminus\{c\})}{A(l_+,c)} - \frac{A(L_{c+}, C\setminus\{c\})}{A(l_-,c)})x(C \setminus \{c\}) \leq \frac{b(L_{c-})}{A(l_+,c)} - \frac{b(L_{c+})}{A(l_-,c)}. \end{cases} \tag{18}$$

Théorème 19: La restriction de toute solution $x(C)$ de S à $C \setminus \{c\}$ est une solution de $S^{\{c\}}$. Inversement pour toute solution $x(C \setminus \{c\})$ de $S^{\{c\}}$, il existe (au moins) une valeur de $x(c)$ telle que le vecteur $x(C)$ soit solution de S.

La démonstration de ce résultat se fait aisément en considérant une solution particulière de $S^{\{c\}}$ qui ne pourrait exister si l'intervalle de définition de $x(c)$ était vide.

Remarque 28: L'application répétée de ce procédé fait croître le nombre d'inégalités de façon super exponentielle, et donc non polynomiale.

C'est ce que l'on vérifie dans [60] où, entre autres, à partir d'un simplexe de $n^2 + n + 1$ variables, on obtient, après projections (l'application de la construction précédente) de $n + 1$ variables, n^{n+1} **facettes**.

On peut imaginer une *construction inverse.*

Les polyèdres combinatoires, celui du voyageur de commerce par exemple, ont un grand nombre de facettes. Celles que l'on connaît sont déjà en nombre non polynomial.

On peut imaginer qu'il existe un polyèdre, dans un espace ayant un certain nombre de dimensions supplémentaires, dont ce polyèdre est la projection. Ce polyèdre pourrait n'avoir qu'un nombre simplement polynomial d'inégalités. Connaître ce polyèdre impliquerait que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Je crois savoir qu'il y a quelques résultats de ce type, mais je n'en ai aucune référence.

6 Remerciements

Je tiens à remercier Michel Kovalev dont les conseils m'ont été précieux tout au long de la rédaction de ce texte, Jacques Gispert et mon épouse Béatrice qui l'ont relu, mes étudiants avec une attention particulière pour Yann. Je reste cependant responsable de toute les erreurs et omissions que vous pourrez y trouver.

References

[1] S. Agmon, *The relaxation method for linear inéqualities,* Canadian Journal of Mathematics 6 382-392 (1954).

[2] J. Bair, et R. Fourneau, *Étude Géométrique des Espaces Vectoriels II, Polyèdres et Polytopes Convexes,* Lect. Notes in Math. 802, Springer Verlag, (1980).

[3] F. Barahona and A.R. Mahjoub, *On the cut polytope,* Mathematical Programming, 36 157-173 (1986).

[4] A. Ben Rebea, *Étude des stables dans les graphes quasi adjoints,* Thèse Université de Grenoble 1 (1981).

[5] C. Berge, *Perfect Graphs,* I. Six papers on graph theory, Indian Statistical Institute, Calcutta (1963).

[6] C. Berge, *Balanced matrices,* I. Mathematical Programming 2 19-31 (1970).

[7] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes,* Dunod, Paris-Bruxelles-Montréal, 1973.

[8] K.H. Borgwardt, *The average number of pivots steps required by the simplex method is polynomial,* Zeitschrift für operations Research 26 157-177 (1982).

[9] G.H. Bradley, *Equivalent integer programs and canonical problems,* Management Science 17 354-366 (1970).

[10] P. Camion, *Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires,* Thèse, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles (1963).

[11] P. Camion, J.F. Maurras, *Polytopes à sommets dans* $\{0,1\}^n$, Mélanges, hommage à P. Gillis, Bruxelles (1982).

[12] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen,* Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo 32 193-217 (1911).

[13] V. Chvátal, *Edmonds Polytopes and a Hierarchy of Combinatorial Problems,* Discrete Mathematics 4 (1973) 305-337.

[14] V. Chvátal, and N. Sbihi, *Recognizing claw-free perfect graphs,* Journal of Combinatorial Theory B 44 154-176 (1988).

[15] G. Cornuéjols, and B. Novick *Ideal* $0,1$ *matrices,* Journal of Combinatorial theory, serie B, 60 145-157 (1994).

[16] G. Cornuéjols, J. Fonlupt and D. Naddef *The traveling salesman problem and some related polyedra,* Mathematical Programming 33 1-27 (1985).

[17] W.H. Cunningham, and J.R. Edmonds, *A combinatorial decomposition theory,* Canadian Journal of Mathematics 32 734-765 (1980).

[18] G.B. Dantzig, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities,* Activity Analysis of Production and Allocation (Tj. C; Koopmans, ed.), Wiley, New York, 330-335 (1951).

[19] G.B. Dantzig, *Note on solving linear programs in integers,* Naval Research Logistic Quarterly 6 75-76 (1959).

[20] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, and S.M. Johnson, *On a Linear-Programming Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem,* Operation Research 7 (1959) 58-66.

[21] R. Descartes, *La Géométrie,* (édition récente : J. Gabay 1991).

[22] M. Déza, and M. Laurent, *Facets for the cut cone I, II,* Mathematical Programming 56(2) 121-160 et 161-188, (1992).

[23] M. Déza, and M. Laurent, *Facets for the Cut Polytope,* Mathematical Programming 56 121-188 (1993).

[24] J.R. Edmonds, *Paths, Trees, and Flowers,* Canadian Journal of Mathematics 17, (1965) 449-467.

[25] J.R. Edmonds, *Maximum Matching and a Polyedron with 0,1-vertices,* Journal of Research of the National Bureau of Standards (B) 69 (1965) 125-130.

[26] J.R. Edmonds, *Minimum partition of a matroïd into independants subsets,* Journal of Research of the National Bureau of Standards (B) 69 (1965) 67-72.

[27] J.R. Edmonds, *Systems of distinct representatives and linear algebra,* Journal of Research of the National Bureau of Standards (B) 71 241-245 (1967).

[28] J.R. Edmonds and R.M. Karp, *Theoritical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems,* J. Assoc. Comput. Mach. 19 248-264 (1972).

[29] L. Euler, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita,* Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 4 140-160 (1752/53).

[30] . J. Fonlupt and M. Raco, *Orientation of matrices,* Mathematical Programming Study, 22 86-98 (1984).

[31] J.B.J. Fourier, *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités,* Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique de Paris 99-10 (1826).

[32] J.C. Fournier, *Sur la représentation sur un corps des matroïdes à 7 ou 8 éléments,* C. R. Académie des Sciences Paris, 270,1970, A 810-813.

[33] R.E. Gomory, *Solving linear programming problems in integers,* in : Combinatorial Analysis (R.Bellman and M. Hall, Jr, eds.) Proceedings of symposia in Applied Mathematics X, American Mathematical society, Providence, R.I., 211-215 (1960).

[34] R.E. Gomory, *Faces of an integer polyedron,* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United State of America 57 16-18 (1967).

[35] M. Grötschel, *Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme,* Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 1977.

[36] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric methods in Combinatorial Optimization,* Jubilee Conference, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1982; W. R. Pulleyblank, ed., Academic Press, Toronto 167-183 (1984).

[37] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization,* Springer-Verlag, Second Corrected Edition, 1988, 1993.

[38] M. Grötschel, and M.W. Padberg, *On the Symmetric Travelling Salesman Problem,* Report No 7536-OR, Institute für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn 1975.

[39] B. Grünbaum, *Convex Polytopes,* John Wiley and sons, London-New York-Sidney, 1967.

[40] M. Held, and R.M. Karp, *The traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees,* Operations Research 18 (1970) 1138-1162.

[41] M. Held, and R.M. Karp, *The traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees : part II,* Mathematical Programming 1 (1971) 6-25.

[42] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen,* Mathematische Annalen 36 473-534 (1890).

[43] R.G. Jeroslow, *A generalisation of a theorem of Chvátal and Gomory,* in: Nonlinear Programming, 2 (O.L. Mangasarian, R.R. Meyer and S.M. Robinson, eds.), Academic Press, New York, 313-331,(1975).

[44] L.G. Khachiyan, *A polynomial algorithm in linear programming,* Soviet Mathematics Doklady 20 191-194 (1979).

[45] N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming,* Combinatorica 4 373-395 (1984).

[46] R.M. Karp, *Reducibility among Combinatorial Problems,* in: Complexity of Computer Computations (R.E. Miller and J.W. Thatcher, eds), Plenum Press, New York, 1972, 85-103.

[47] R.M. Karp, *On the Computational Complexity of Combinatorial Problems,* Networks 5, 1975, 45-68.

[48] R.M. Karp and C.H. Papadimitriou, *On linear characterisation of combinatorial optimization problems,* in 21th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Syracuse, New York, 1980,1-9 (final publication : SIAM Journal on Computing 11, 1982, 620-632).

[49] E.L. Lawler and al. (eds), *The Traveling Salesman Problem,* John Wiley and Sons, 1985.

[50] M. Laurent, and S.V. Poljak, *Gap inequalities for the Cut Polytope,* European Journal of Combinatoric 17 223-254 (1996).

[51] L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture,* Discrete Mathematics 2, 253-267 (1972).

[52] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra, Jr, and L. Lovász, *Factoring polynomials with rational coefficients,* Mathematische Annalen 261 515-534 (1982).

[53] P. McMullen, *The maximum numbers of faces of a convex polytope,* Mathematika 17, 179-184 (1970).

[54] J.F. Maurras, *Some Results on the Convex Hull of the Hamiltonian Cycles of Symmetric Complete Graphs,* in B. Roy ed., Combinatorial Programming, Methods and Applications, D. Reidel, Dordrecht, (1975).

[55] J.F. Maurras, *Polytopes à sommets dans* $\{0,1\}^n$, Thèse d'État, Université de Paris VII, (1976).

[56] J.F. Maurras, *Bons Algorithmes, Vieilles Idées,* Note E.D.F. HR 32.0320, 1978.

[57] J.F. Maurras, *Good Algorithms, Old Ideas,* manuscript, Text of a talk made in Szeged at the conference on Combinatoric, August 1978.

[58] J.F. Maurras, *Convex Hull of the Edges of a Graph and Near Bipartite Graphs,* Dicrete Mathematics 46 257-265 (1983).

[59] J.F. Maurras, K. Truemper and M. Akgül, *Polynomial algorithms for a class of linear programs,* Mathematical programming 2, 1981, pp121-136.

[60] J.F. Maurras, *The line-polytope of a finite affine plane,* Discrete Mathematics 115 283-286 (1993).

[61] J.F. Maurras, *Supporting hyperplanes and the strong solution problem,* Document interne du LIM, décembre 1994.

[62] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais,* Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique ($2^{ième}$ partie) 666-704 (1784).

[63] T.S Motzkin, and I.J. Schoenberg, *The relaxation method for linear inequalities,* Canadian Journal of Mathematics 6 393-404 (1954).

[64] M.W. Padberg and M.R. Rao, *The Russian method for linear programming III: Bounded integer programming,* Research report 81-39, New York University, Graduate School of Business Administration, New York, 1981.

[65] M. Perles, in B. Grünbaum book *Convex Polytopes*.

[66] Platon, *La République,* Traduction E. Chambry, 2 vols., Paris (Les Belles Lettres), 1932-49.

[67] A. Schrijver, *On Cutting planes,* [in : Combinatorics 79 Part II (M. Deza and I.G. Rosenberg, eds.),] Annals of Discrete Mathematics 9 291-296 (1980).

[68] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming,* John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore (1986).

[69] S. Smale, *On the average number of steps in the simplex method of linear programming,* Mathematical Programming 27 241-262 (1983).

[70] B. Segre, *Lectures on Modern Geometry,* Edizioni Cremonese, Roma 1961.

[71] P.D. Seymour, *Decomposition of regular matroïds,* Journal of Combinatorial theory B 28 305-359 (1980).

[72] S.I. Veselov, and V.N. Shevchenko, *Exponential qrowth of coefficients of aggregating equations (in Russian),* Kibernetika (Kiev) 4 78-79 (1978) [English Translation : Cybernetics 14 563-565 (1978)].

[73] B. Teissier, *Variétés Toriques et Polytopes,* Séminaire Bourbaki (1981), et Lect Notes in Math. 901, Springer Verlag (1981).

[74] H. Weyl, *Elementare Theorie der konvexen Polyeder,* Commentarii Mathematici Helvetici, 7 290-306 (1935).

[75] H. Withney, *On the abstract properties of linear dependance,* American Journal of Mathematics, 57 509-533 (1935).

[76] V.A. Yemelitchev, M.M. Kovalev, and M.K. Krastov, *Mnogogranniki grafy otimizatsiya,* Izdat. Nauka, Moscow (1981) [English translation : *Polytopes, Graphs and Optimisation,* Cambridge University Press, Cambridge (1984).