Azar, Algoritmos y Autómatas

Ejercicios para entregar

Definición: Una secuencia infinita x en el afabeto $\{0,1\}$ es de Bruijn si cumple que, o bien para todo n par, $x[1,2^n]$ es de Bruijn de orden n , o bien para todo n impar, $x[1,2^n]$ es de Bruijn de orden n.

Ejercicio 0

Demostrar que las secuencias de Bruijn infinitas existen paar el alpfabeto de dos símbolos.

Ejercicio 1

Demostrar que la concatenación de secuencias de Bruijn de orden sucesivo es normal.

Ejercicio 2

Demostrar que la concatenación de secuencias $(2n,2n)-$perfectas para $n=1,2,3,\ldots$ es una secuencia normal.

Ejercicio 3

Dar la demostración del teorema de Piatetski-Shapiro para ocurrencias alineadas.

Ejercicio 4

Sea x una secuencia $(2^m,2^m)$-perfecto anidado. Mostrar que, para todo N, para todo $\ell \leq m$,

$$\Delta_{\ell,N}(x) \leq O\big(2^{2m}/N\big).$$

¿Podés comentar algo sobre la cota inferior de $\Delta_{\ell,N}(x)$? **Ayuda:** Fijemos N entre 1 y $|x| = 2^m b^{2^m}$. Sean N_0 y $n_1,\ldots n_{2^m-1}$ enteros tales que $0 \leq N_0 < 2^m$, $n_i \in \{0,...,b-1\}$ y

$$N = 2^m \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} n_i b^i\right) + N_0.$$

Es decir, escribimos N como la suma de las longitudes de n_i secuencias $(i,2^m)$-perfectas anidadas para $i=0,\ldots,2^{m-1}$ más N_0, con $0 \leq N_0 < 2^m$,

$$x[1,N] = \boxed{n_0 2^m b^0 \mid n_1 2^m b^1 \mid n_2 2^m b^2 \mid \ldots \mid n_{2^m-1} 2^m b^{2^m-1} \mid N_0}$$

Ejercicio 5

Adaptar el algoritmo de Turing para generar un número normal en base 2 y base 5, y expresar su expansion fraccionaria en base 5.

Ejercicio 6

Adaptar el algoritmo polinomial BHS para general un número normal en base 2 y 3,y expresar su expansion fraccionaria en base 3.

Ejercicio 7

Dada una secuencia $a_1 a_2 \ldots$ donde los a_i son símbolos del alfabeto, $tres(x)$ es la subsecuencia de x que se obtiene de tomar los símbolos en las posiciones múltiplos de tres de x Es decir, $tres(x) = a_3a_6a_9 \ldots$.

Demostrar que si x es una secuencia normal entonces la subsecuencia $tres(x)$ es normal.

Ejercicio 8
Indicar una forma de selección de subsecuencias tal que no siempre preserva normalidad. Dar un ejemplo de una secuencia normal donde no se preserve.

Ejercicio 9
Demostrar que los números Martin-Löf aleatorios son normales.

Ejercicio 10
Dar un algoritmo que permite computar Ω con un oráculo para el problema de la detención.

Ejercicio 11 Demostrar dando un test que estos no son Martin-Löf aleatorios:

1. La secuencia característica de la detención.
2. El número β de Turing.
3. El número Ω' que resulta de intercalar 0s entre los bits de Ω. Es decir, si $\Omega = b_1b_2b_3\ldots$ entonces $\Omega' = b_10b_20b_30\ldots$.

Ejercicio 12

1. Demostrar que el número $(1-\Omega)$ es aleatorio.
2. Para todo conjunto X infinito c.e. pero no computable

   $$\sum_{x\in X} 2^{-|x|}$$

   es Martin-Löf aleatorio.
3. El número Ω_0 que resulta de anteponer mil 0s delante de Ω
4. Demostrar que $\displaystyle\sum_{\text{palabra } s} 2^{-K(s)}$ es computablemente aproximable desde abajo y Martin Löf aleatorio.

Ejercicio 13
Dar un test de Martin Löf que contenga a los números decimales cuya expansion decimal no contiene el 7 .

Ejercicio 14 (opcional)
Demostrar que ningún numero de Liouville es Martin Löf aleatorio.

Ejercicio 15 (por definir, sobre tests de aleatoriedad de secuencias finitas)