Los numeros reales que carecen de 7s no son aleatorios

Daremos un test de Martin Löf que cubre al conjunto de reales que carecen de 7s en su expansin decimal. Comencemos con los siguientes conjuntos de intervalos. Escribimos $|\ \ |$ para denotar la medida del conjunto.

$$A_0 = (0,1) - [0{,}7, 0{,}8] = (0, 0{,}7) \cup (0{,}8, 1)$$

$$|A_0| = 1 - \frac{1}{10}$$

$A_1 = (0,1) - [0{,}7, 0{,}8]-$
$[0{,}07, 0{,}08] - [0{,}17, 0{,}18] - [0{,}27, 0{,}28] - [0{,}37, 0{,}38] - [0{,}47, 0{,}48]-$
$[0{,}57, 0{,}58] - [0{,}67, 0{,}68] - [0{,}87, 0{,}88] - [0{,}97, 0{,}98]$.
O equivalentemente,

$$A_1 = A_0 - \bigcup_{0\leq k\leq 9, k\neq 7} [k^{-1}7^{-2},\ k^{-1}8^{-2}]$$

$$|A_1| = \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{9}{100}$$

En general, $A_n = A_{n-1} -$

$$\bigcup_{0\leq k_1\leq 9, k_1\neq 7} \bigcup_{0\leq k_2\leq 9, k_2\neq 7} \cdots \bigcup_{0\leq k_n\leq 9, k_n\neq 7} [k_1^{-1}k_2^{-2}\ldots k_n^{-n}7^{-(n+1)}, k_1^{-1}k_2^{-2}\ldots k_n^{-n}8^{-(n+1)}]$$

$$|A_n| = \left(\left(\left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{9}{100}\right) - \ldots \frac{9^n}{100^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^i$$

Dado que la serie

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)}$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^i = \frac{1 - \frac{9}{10}^{n+1}}{1 - \frac{9}{10}}$$

Luego

$$|A_n| = \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$$

Ahora si definimos el test de Martin Löf dado por B_j, $j \leq 0$ tal que $|B_j| \leq 10^{-j}$.

Busco n suficientemente grande tal que $|A_n| \leq 10^{-j}$, es decir

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^j$$

Elevando a la -1 ambos miembros y luego tomando logaritmo en base 10, obtenemos

$$(n+1) * log\left(\frac{10}{9}\right) \geq j.$$

Luego, para $n = 100j$ anda bien. $B_j = A_{100j}$ cumple $|B_j| \leq 10^{-j}$. Conseguimos un test de Martin Löf que cubre todos los números reales cuya expansion decimal contiene al menos un 7.