UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Discrepancia del Número de Champernowne

Nicole Graus

Directora: Verónica Becher

Fecha de Presentación: 18 de diciembre de 2023

Resumen

El número de Champernowne 0.123456789101112131415... es el ejemplo más conocido (y el más simple) de un número normal en el sentido de Borel: en su expansión fraccionaria expresada en una base entera todos los dígitos aparecen con la misma frecuencia asintótica, y todos los bloques de dígitos de igual tamaño también aparecen con la misma frecuencia asintótica. La velocidad de convergencia de un número a la normalidad se estudia mediante la noción de discrepancia de la teoría de distribución uniforme de secuencias de números reales. Gracias a un resultado de Schiffer (Acta Arithmetica 1986), que aplica a una familia grande de números reales, se sabe cuál es exactamente la velocidad de convergencia a normalidad del número de Champernowne. En este trabajo particularizamos el resultado de Schiffer para el número de Champernowne, pero dando una demostración discreta y elemental.

Agradecimientos

A mis papás por apoyarme en muchísimos sentidos todos estos años. A mi papá por el primer libro de matemática que leí. A mi mamá por la preocupación y su profundo deseo de “suerte, suerte, suerte” en cada parcial y recuperatorio.

A Lucas, Mica, Ale y Ian por nuestra unión, de pocas palabras, pero con mucha complicidad. A Hanna, Natan y Caleb por haberme enseñado un amor nuevo.

A Opa, Oma y Felipe a quienes recuerdo con admiración y cariño. A Matilde por mimarme y cuidarme; por sus almuerzos, galletitas y bombones para cuando “estudiaba demasiado”.

A Carmela, Luna, Nati, Nina, Mari, Pau y Sasha por todos los *Hatzlojes*; por ser mi red de contención y sostén.

A Coco por acompañarme todo este año, por preguntarme después de cada reunión cómo me fue, por los kilómetros recorridos, por estar y apoyarme.

A Lola por transitar conmigo este camino de principio a fin, haciéndolo mucho más fácil, divertido y enriquecedor. A Lucía por ser parte de esos primeros años difíciles y cruciales que recuerdo con aprecio. A María y Nico por agarrarme de la mano desde el primer Meet. A Cami, Dante, Sol, Rama y Yuri; a toda esta familia que admiro y disfruto. A Cande, Euge, Justi, Seba, Nacho, Ceci, Teo, Martín, Nico y Gabi. Estoy agradecida de haberlos conocido y compartido tanto tiempo.

A Dani Cuesta por no dudar en ayudarme y escucharme en cada crisis de la carrera. A Inés por esa charla en su oficina donde me mencionó a Vero como posible directora. Agradezco haber tenido tan buenas profesoras.

A Eda y Nico por aceptar ser el jurado de esta tesis, por sus preguntas y correcciones, por la amabilidad y el hermoso trato que permitieron que esta etapa final sea una muy linda experiencia.

A Vero, por su dulzura, paciencia y simpatía, por devolverme la motivación en cada reunión, por hacerse el tiempo y estar siempre, por ser un ejemplo como directora. Gracias.

Shejeianu.

Índice

1. Introducción: Números normales y discrepancia

Hace más de cien años Émile Borel definió la propiedad de normalidad de números reales: un número real es normal en una base entera dada si en su expansión fraccionaria en base b todos los dígitos aparecen con la misma frecuencia asintótica y más aún, todos los bloques de dígitos de igual tamaño también tienen la misma frecuencia asintótica.

Borel demostró que casi todos (en el sentido de la medida de Lebesgue) los números reales son normales en todas las bases enteras mayores o iguales que 2. Una linda versión de esta demostración aparece en [6, Theorem 148].

A Borel le hubiese gustado dar un ejemplo de un número normal que sea una de las constantes matemáticas como el número π, ó el número e, ó $\sqrt{2}$. Pero hasta el momento ninguna de esas constantes fue demostrada normal, en ninguna base. Sigue siendo un problema abierto.

El ejemplo más conocido de un número normal es el número de Champernowne

$$0,1234567891011121314151617181920212223242526\,27...$$

Se debe a David Champernowne [2] en 1933. La demostración es elemental y se basa en un conteo riguroso.

Dado que la propiedad de normalidad es una propiedad asintótica de los segmentos iniciales de su expansión fraccionaria, si un número es normal, entonces converge a la normalidad a cierta velocidad. No solamente nos interesa saber si un número es normal, sino que además nos interesa saber a qué velocidad converge a normalidad. Hay muchas preguntas abiertas acerca de la velocidad de convergencia de los números normales, ver [1].

Para estudiar la velocidad de convergencia a normalidad se usa la noción de discrepancia de la teoría de distribución uniforme módulo uno. La discrepancia de los segmentos iniciales de una sucesión se expresa como una función del tamaño del segmento. Una referencia clásica sobre la teoría de distribución uniforme de secuencias es [7], que cuenta con un capítulo dedicado a números normales. Sorprendentemente, casi todos (en el sentido de la medida de Lebesgue) son normales con la misma velocidad de convergencia: esencialmente la discrepancia de normalidad de casi todos los números reales está dada por la ley del logaritmo iterado. Este resultado es la combinación de [5, 8]. Sin embargo, no se conoce hasta el momento la máxima velocidad de convergencia a normalidad, es decir, la mínima discrepancia de un número normal. Este problema abierto es uno de los que nos motiva a estudiar cómo se calcula rigurosamente la discrepancia de números definidos mediante construccciones ad hoc. El número de Champernowne es el principal ejemplo de un número construido para ser normal. Como veremos más adelante, la discrepancia del número de Champernowne es mucho mayor que la de casi todos los números, es decir su convergencia a normalidad es más lenta.

A partir de un resultado de Schiffer [11] que aplica en una familia grande de números reales (pero de medida de Lebesgue cero), se sabe cuál es exactamente la velocidad de convergencia a normalidad del número de Champernowne. Schiffer prueba que para todo polinomio f no constante con coeficientes racionales, tal que $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la velocidad de convergencia de

$$\alpha := 0, f(1)f(2)\dots f(n)\dots,$$

cuya expansión fraccionaria esta formada por la concatenación de los valores de f evaluado en los números naturales, es del orden $O(1/\log x)$. En particular, vale para el número de Champernowne, tomando $f(t) = t$. Posteriormente, Nakai y Shiokawa en [9] generalizan este resultado para f con coeficientes reales. Allí, proponen que para todo f no constante con coeficientes reales, tal que $f(t) > 0$ para todo $t > 0$, entonces la velocidad de convergencia a normalidad de

$$\alpha := 0, [f(1)]f[(2)]\dots[f(n)]\dots$$

es del orden $O(1/\log x)$. Cabe destacar que esta familia sigue teniendo medida de Lebesgue cero, pues $O(1/\log x)$ es mayor a la ley del logaritmo iterado que cumplen casi todos los números [5, 4].

En este trabajo particularizamos el resultado de discrepancia de normalidad dado por Schiffer para el número de Champernowne, pero dando una demostración discreta y elemental. Nuestra motivación no sólo es dar una prueba sencilla a un resultado que se utiliza frecuentemente, sino también entender las herramientas y métodos que se pueden usar para calcular discrepancias, con el fin de que se puedan aplicar después a otros ejemplos, y así acercarnos a responder grandes preguntas sobre la velocidad de convergencia a normalidad.

2. El número de Champernowne

El número de Champernowne en base 10 es la constante que definió David Champernowne en [2] para dar un ejemplo de número normal en base 10 en el sentido de Borel. Más precisamente:

Definición (Número de Champernowne)**.** Llamamos *Número de Champernowne en base 10* al número

$$c := 0{,}1234567891011121314151617181920212223\dots$$

cuyos dígitos después de la coma se obtienen concatenando de manera ascendente los números naturales.

Observación. Podemos ver la expansión de Champernowne como la concatenación de términos $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $t_i = i$. Por comodidad, al escribir el número de Champernowne, vamos a separar estos términos mediante un espacio: $c = 0{,}1\ 2\ 3\dots 9\ 10\ 11\dots 99\ 100\ 101\dots 999\ 1000\dots$

Para estudiar la velocidad de convergencia del número de Champernowne, necesitamos definir la discrepancia de una sucesión.

Definición (Discrepancia)**.** Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1)$, y dado $N \in \mathbb{N}$, se define la *discrepancia* en los primeros N términos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$D_N\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \sup_{0\leq a<b<1}\left|\frac{\#\{n\in\{1,\dots,N\} : x_n\in[a,b)\}}{N} - (b-a)\right|.$$

La discrepancia mide qué tan equidistribuídos están los primeros N términos de la sucesión en el intervalo $[0,1)$: Para cada intervalo en el $[0,1)$, contamos la cantidad de términos que pertenecen al intervalo, dividimos por los términos observados para obtener la frecuencia, y comparamos esa frecuencia con el tamaño del intervalo tomado.

Ahora, para poder usar la noción de discrepancia para medir la velocidad de convergencia a normalidad, vamos a definir para cada número normal, una sucesión a la que le calcularemos su discrepancia. Cabe aclarar que en todo el trabajo utilizaremos base 10, pero las definiciones y propiedades son adaptables a cualquier base entera b.

Definición. Dado $\alpha \in [0,1)$, definimos la discrepancia de α como

$$D(\alpha, N) := D_N((10^{n-1}\alpha \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Es decir, si escribimos a α en base 10, $\alpha = 0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\dots$, entonces estamos utilizando la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuyos elementos son:

$$\begin{array}{lclcl}
x_1 & := & 10^0\alpha \mod 1 & = & 0,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\dots \\
x_2 & := & 10^1\alpha \mod 1 & = & 0,\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\dots \\
x_3 & := & 10^2\alpha \mod 1 & = & 0,\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\dots \\
 & \vdots & & & \\
x_n & := & 10^{n-1}\alpha \mod 1 & = & 0,\alpha_n\ \alpha_{n+1}\ \alpha_{n+2}\cdots
\end{array}$$

La tesis de Wall [3] demuestra que los números normales en base 10 son exactamente aquellos números α para los cuales la sucesión $(10^{n-1}\alpha \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente distribuida, y esto significa que la discrepancia de los primeros N términos de la sucesión tiende a 0 cuando N va a infinito. De ahí que la velocidad de la convergencia a normalidad se estudia a través de la discrepancia.

Se sabe por Gál y Gál [5] la cota superior para la discrepancia de casi todos los números (en el sentido de Lebesgue). Philipp [10] da las constantes explicitas, y Fukuyama [4] las afina, obteniendo que para todo número real $\theta > 1$, existe una constante C_θ tal que para casi todo número real α,

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\sqrt{N}D_N((\theta^n\alpha \mod 1)_{n\geq 0})}{\sqrt{\log(\log N)}} = C_\theta.$$

Es decir que para casi todo número real α vale

$$D(\alpha, N) = O\left(\frac{\sqrt{\log(\log N)}}{\sqrt{N}}\right).$$

Posteriormente, Moran y Pearce [8] obtienen la cota inferior para casi todo número. Sin embargo, como veremos a continuación, la discrepancia del número de Champernowne no obedece ese mismo orden.

Notación. Tomemos $\alpha = c$ el número de Champernowne. Llamamos c_i al dígito número i en la expansión decimal de c.
Por ejemplo, $c_{11} = 0$ y $c_{14} = 1$, pues

$$c = 0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots \underbrace{c_{10}\, \mathbf{c_{11}}}_{t_{10}}\, c_{12}\, c_{13}\, \underbrace{\mathbf{c_{14}}\, c_{15}}_{t_{12}} \ldots = 0, 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\, \underbrace{1\mathbf{0}}_{t_{10}}\, 11\, \underbrace{\mathbf{1}2}_{t_{12}} \ldots$$

Luego, definimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (10^{n-1}c \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, 1\,2\,3\,4\,5 \ldots \\
x_2 &= 0, 2\,3\,4\,5\,6 \ldots \\
&\vdots \\
x_{10} &= 0, 10\,11\,12 \ldots \\
x_{11} &= 0, 0\,11\,12\,13 \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, c_n\, c_{n+1}\, c_{n+2} \cdots
\end{aligned}$$

Esta sucesión es la que usaremos a lo largo de los siguientes teoremas y demostraciones para dar una estimación de la discrepancia del número de Champernowne. O sea, nuestro objetivo es estimar

$$D(c, N) := D_N\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Durante todo el texto, para hacer las estimaciones, usaremos la notación de Landau: para f y g funciones definidas sobre los números reales, y g estrictamente positiva, escribimos $f(x) = O(g(x))$ si existe una constante positiva C y un valor x_0 tal que para todo $x > x_0$, $|f(x)| < Cg(x)$. Y escribimos $f(x) = o(g(x))$ si para toda constante positiva ε, existe x_0 tal que $|f(x)| \leq \varepsilon g(x)$ para todo $x \geq x_0$.

Como mencionamos antes, Schiffer [11, Teoremas 1 y 3] dio el orden exacto de discrepancia de secuencias $(10^{n-1}\alpha \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}$ para una gran familia de números α, que incluyen al número de Champernowne. Allí, Schiffer prueba que para todo polinomio f no constante con coeficientes racionales, tal que $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la discrepancia de $\alpha := 0, f(1)f(2)f(3)\ldots$ cumple:

1. $D(\alpha, N) = O\left(\dfrac{1}{\log N}\right)$.
2. Existe una constante $K > 0$ tal que hay infinitos N para los cuales $D(c, N) > \dfrac{K}{\log N}$.

Observemos que si aplicamos este resultado de Schiffer al número de Champernowne (tomando el polinomio $f(x) = x$) y lo comparamos con la ley del logaritmo iterado de Gál y Gál, se puede notar que la cota superior de la discrepancia de casi todos los números es menor que la cota inferior de la discrepancia del número de Champernowne. Es decir, el número de Champernowne converge a normalidad mucho más lentamente que casi todo número. Nos proponemos aquí particularizar la demostración de Schiffer al caso del número de Champernowne, y explicitar la constante K de la cota inferior de su discrepancia. A continuación, enunciamos los teoremas que buscamos demostrar:

Teorema 1. *Sea c el número de Champernowne en base* 10. *Entonces,*

$$D(c, N) = O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Teorema 2. *Sea c el número de Champernowne en base* 10. *Entonces, existe una constante $K > 0$ tal que hay infinitos N para los cuales*

$$D(c, N) > \frac{K}{\log N}.$$

Más aún, vale para la constante $K = 1/9$.

Observación. El Teorema 2 implica que $D(c, N) \neq o\left(\frac{1}{\log N}\right)$ como función de N. Es decir, que la estimación del Teorema 1 no se puede mejorar.

Observación. Estas mismas cotas obtiene Schiffer en [11] para su gran familia de números, con la diferencia de que él no explicita la constante K.

3. Definiciones preliminares: Contador de Ocurrencias y normalidad

Antes de comenzar con las demostraciones de los teoremas, damos algunas definiciones que usaremos a lo largo de las mismas.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $B = (b_1 \dots b_k)$ un bloque de dígitos $b_i \in \{0, \dots, 9\}$ de longitud k. Sea $\alpha \in [0, 1)$, cuya escritura en base decimal es $\alpha = 0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \dots$. Sea $c = 0{,}1\ 2 \dots 9\ 10\ 11 \dots = 0, t_1\ t_2 \dots t_9\ t_{10}\ t_{11} \dots = 0, c_1\ c_2 \dots c_9\ c_{10}\ c_{11}\ c_{12}\ c_{13} \dots$ el número de Champernowne.

Definición (Contador de Ocurrencias)**.** Sean $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $N \leq M$. Definimos $\mathcal{N}(B, \alpha, N, M)$ como la cantidad de veces que B aparece dentro de $(\alpha_N\ \alpha_{N+1} \dots \alpha_M)$ como k dígitos consecutivos.

Ejemplo. Para entender la definición anterior, tomemos por ejemplo:
$N = 5$, $M = 20$, $B = (1\ 3\ 1)$ y $\alpha = 0{,}1315\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_N}}{1}321\mathbf{13131}75\mathbf{131}9\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_M}}{1}31.$
Entonces, $\mathcal{N}(B, \alpha, N, M) = 3$.

Teniendo esta función contadora de ocurrencias podemos definir formalmente normalidad en base 10.

Definición (Normalidad)**.** Decimos que α es *normal en base 10* si para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo B bloque de dígitos de longitud k

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mathcal{N}(B, \alpha, 1, N)}{N} = \frac{1}{10^k}.$$

Analicemos con un poco más de detalle la definición de normalidad: Para determinar si un número $\alpha \in [0, 1)$ es normal en base 10, deberíamos verificar en primer lugar que todos los dígitos desde el 0 hasta el 9 aparezcan en su expansión decimal con la misma frecuencia asintótica de $1/10$. Es por eso que en la definición de normalidad, para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada bloque B de longitud $k = 1$, observamos los primeros N dígitos de la expansión de α, contamos la cantidad de ocurrencias de B allí, y dividimos por N, la cantidad de dígitos observados, obteniendo la frecuencia de ocurrencias de dicho bloque B. Luego, pedimos que en el límite esa frecuencia tienda a $1/10$. Análogamente, tomando $k = 2$, deberíamos verificar que todos los bloques de tamaño 2, desde (0 0) hasta (9 9), ocurran con la misma frecuencia asintótica $1/10^2$. En general, necesitaríamos que todos los bloques de dígitos de igual tamaño k aparezcan con la misma frecuencia asintótica $1/10^k$.

Ahora, para entender cómo se relaciona la definición de normalidad con la noción de discrepancia, y por qué esta última mide la velocidad de convergencia a normalidad, tenemos la siguiente equivalencia probada por Wall [3]:

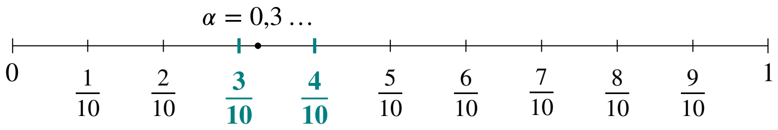
Proposición. *Un número real α es normal en base 10 si y sólo si* $\lim_{N \to \infty} D(\alpha, N) = 0$.

Algunas ideas para la prueba de esta proposición se pueden encontrar más adelante en la demostración que presentamos del Teorema 1. De todas formas, a continuación damos algunas observaciones y ejemplos para entender la relación entre el contador de ocurrencias y la discrepancia.

Observación. Sea $\alpha \in [0, 1)$. Escribamos $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots$ para denotar su expansión decimal. Si partimos el intervalo $[0, 1)$ en pequeños intervalos de tamaño 1/10, preguntarse en cuál de esos diez intervalos se ubica α equivale a determinar quién es α_1, el primer dígito de su expansión decimal.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \left[0, \frac{1}{10}\right) &\iff \alpha_1 = 0 \\
\alpha \in \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right) &\iff \alpha_1 = 1 \\
\alpha \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right) &\iff \alpha_1 = 2 \\
&\vdots \\
\alpha \in \left[\frac{9}{10}, 1\right) &\iff \alpha_1 = 9
\end{aligned}$$

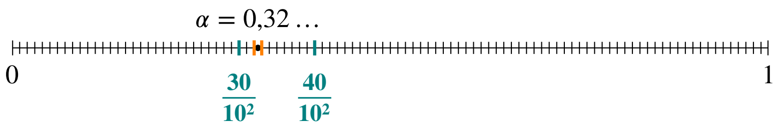
Dejamos un ejemplo para ilustrar:



Aquí debemos hacer una aclaración. Sabemos que los números con desarrollo decimal finito tienen también un desarrollo decimal infinito que termina con infinitos 9's. Por ejemplo, $\alpha = 0,3 = 0,2999\ldots$. Luego, si consideramos el desarrollo infinito, tendríamos que $\alpha \in [3/10, 4/10)$, pero $\alpha_1 = 2$. Por eso, debemos aclarar que a lo largo de todo el trabajo no vamos a considerar los desarrollos decimales que terminen con infinitos 9's; en tales casos, nos quedaremos con el desarrollo finito del número.

Siguiendo el razonamiento anterior, si ahora en vez de partir el $[0, 1)$ en 10 interavlos, lo partimos en 100 intervalos de tamaño $1/10^2$, entonces para ubicar a α necesitamos determinar α_1 y α_2, los primeros dos dígitos de su expansión decimal. Por ejemplo,

$$\alpha \in \left[\frac{32}{10^2}, \frac{33}{10^2}\right) \iff \alpha_1 = 3 \wedge \alpha_2 = 2.$$



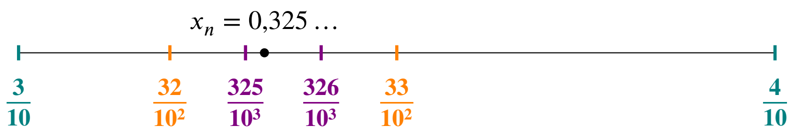
Ahora, veamos qué pasa si en vez de querer ubicar únicamente a $x_1 = \alpha$, buscamos a qué intervalo pertence $x_n = 10^{n-1}\alpha \mod 1$, para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$, como hacemos en la definición de discrepancia.

Veamos un ejemplo. Partamos el intervalo $[0, 1)$ en 1000 intervalos de tamaño $1/10^3$ y consideramos uno de ellos,

$$I = \left[\frac{325}{10^3}, \frac{326}{10^3}\right).$$

Como $x_n = 10^{n-1}\alpha \mod 1 = 0, \alpha_n\, \alpha_{n+1}\, \alpha_{n+2} \ldots$, tenemos que

$$x_n \in I \iff \alpha_n = 1 \wedge \alpha_{n+1} = 3 \wedge \alpha_{n+2} = 0 \iff \alpha = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\, 3\, 2\, 5\, \alpha_{n+3} \ldots .$$



Es decir, x_n pertenece al intervalo I si y sólo si hay una ocurrencia del bloque $B = (3\,2\,5)$ en el dígito número n de α. Luego, si tomamos $k = 3$, la longitud del bloque B, vale

$$\begin{aligned} \#\{n \in \{1, \ldots, N\} : x_n \in I\} &= \#\{n \in \{1, \ldots, N\} : (\alpha_n\, \alpha_{n+1}\, \alpha_{n+2}) = (3\,2\,5)\} \\ &= \mathcal{N}(B, \alpha, 1, N) + O(k), \end{aligned}$$

donde el $O(k)$ proviene de notar que en el segundo término de la cadena de igualdades estamos mirando las ocurrencias de B desde $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ hasta $(\alpha_N\, \alpha_{N+1}\, \alpha_{N+2})$; mientras que $\mathcal{N}(B, \alpha, 1, N)$ cuenta las ocurrenicas de B desde $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$, pero hasta $(\alpha_{N-2}\, \alpha_{N-1}\, \alpha_N)$. Como en el peor de los casos allí podría haber una diferencia de dos ocurrencias, debemos agregar el $O(k)$, que de todas formas, no será relevante cuando hagamos tender N a infinito.

Por último, observemos que el primer término de la cadena de igualdades es el cardinal que utilizamos en la definición de discrepancia, mientras que el último término es el contador de ocurrencias que usamos para la definición de normalidad. De esta forma, si dividimos ambos términos por N, obtenemos respectivamente cada frecuencia, y queda en evidencia la relación entre discrepancia y normalidad.

Seguimos con más definiciones que usaremos en las demostraciones.

Definición. Decimos que una ocurrencia de B en c es *a caballo* si B ocurre entre dos o más términos t_i de la expansión de Champernowne.
Notamos $\mathcal{N}_c(B, c, N, M)$ a la cantidad de ocurrencias a caballo de B en $(c_N\ c_{N+1} \ldots c_M)$.

Decimos que una ocurrencia de B en c *no es a caballo*, si B ocurre dentro de un solo término t_i de la expansión de Champernowne.
Notamos $\mathcal{N}_{nc}(B, c, N, M)$ a la cantidad de ocurrencias no a caballo de B en $(c_N\ c_{N+1} \ldots c_M)$.

Ejemplo. Tomemos $N = 1$, $M = 36$ y $B = (1\ 2)$. Entonces,
$\mathcal{N}_{nc}(B, c, N, M) = 1$, pues

$$c = 0.\underset{\substack{\uparrow \\ x_N}}{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \mathbf{12}\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ \underset{\substack{\uparrow \\ x_M}}{2}3\ 24\ldots$$

$\mathcal{N}_c(B, c, N, M) = 2$, pues

$$c = 0.\underset{\substack{\uparrow \\ x_N}}{\mathbf{1}}\ \mathbf{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 2\mathbf{1}\ \mathbf{2}2\ \underset{\substack{\uparrow \\ x_M}}{2}3\ 24\ldots .$$

Observación. $\mathcal{N}(B, c, N, M) = \mathcal{N}_{nc}(B, c, N, M) + \mathcal{N}_c(B, c, N, M)$

Definición. Dado $\ell \in \mathbb{N}$, vamos a llamar s_ℓ a la concatenación de números $(\overbrace{10\ldots0}^{\ell \text{ dígitos}}, \ldots, \overbrace{9\ldots9}^{\ell \text{ dígitos}})$, formada por todos los números naturales de ℓ dígitos ordenados de forma ascendente (desde $10^{\ell-1}$ hasta $10^\ell - 1$).

Ejemplo. $s_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$
$s_2 = (10\ 11\ 12 \ldots 98\ 99)$
$s_3 = (100\ 101 \ldots 998\ 999)$

Definición. Dado $v \in \mathbb{N}$, llamamos $T(v)$ a la cantidad de dígitos en la expansión de Champernowne hasta el término $t_v = v$, es decir la cantidad de dígitos del siguiente número:
1 2 3 ... 9 10 11 ... 99 100 ... 999 1000 ... v.

Ejemplo. Si tomamos $v = 11$, entonces $T(v) = 13$, pues 0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 tiene 13 dígitos en su expansión decimal.

Notación. Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomemos $v \in \mathbb{N}$ tal que $T(v) \geq N$ y $T(v - 1) < N$. Por la definición anterior, $T(v)$ es la cantidad de dígitos que hay desde 1 hasta v. Luego, v es el número natural donde se encuentra el dígito número N de la expansión de Champernowne (puede ser que el dígito número N se encuentre en la mitad de v, y no exactamente en el último dígito de v). Además, llamamos n a la cantidad de dígitos de v.

Ejemplo. Si tomamos $N = 14$, entonces $v = 12$ y $n = 2$, pues $T(v) = 15 \geq N$ y $T(v - 1) = 13 < N$.

$$c = 0,1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ c_N}}{1}2}^{v}\ 13\ldots$$

4. Teorema 1: Cota superior

4.1. Orden del Contador de Ocurrencias

Recordemos el enunciado del Teorema 1:

Teorema 1. *Sea c el número de Champernowne en base 10. Entonces,* $D(c, N) = O\left(\frac{1}{\log N}\right)$.

Para demostrar el Teorema necesitamos estimar la discrepancia de c. La discrepancia de un segmento inicial de c es la máxima diferencia entre la cantidad de ocurrencias observadas de un bloque en ese segmento inicial y la cantidad esperada por equifrecuencia de bloques. Por lo tanto, nos interesa encontrar el orden de $\mathcal{N}(B, c, 1, N)$ como función de N, para luego demostrar el Teorema 1.

A continuación procedemos a calcular el orden de $\mathcal{N}(B, c, 1, N)$ en el Lema 1, que enunciaremos, demostraremos y posteriormente, utilizaremos en la demostración del Teorema 1. Cabe destacar que el esquema que presentamos en la demostración del Teorema 1 es el mismo que utiliza Schiffer para demostrar la versión general del mismo [11, Teorema 1]. Sin embargo, la forma en que estimamos el orden de la función contadora de ocurrencias en nuestro Lema 1 es muy distinta a cómo lo hace Schiffer en [11, Demostración del Teorema 1, Lema 1]. Schiffer propone una demostración compleja, utilizando sumas exponenciales. Al particularizar el resultado a un solo número, pudimos presentar una demostración elemental, adaptando los métodos discretos que utiliza Champernowne al probar normalidad. Así, la prueba de nuestro Lema 1 es una fusión de las ideas de Schiffer y las de Champernowne. Schiffer nos aportó algunos esquemas generales para estimar la función contadora y saber qué cotas estábamos buscando, mientras que gracias a Champernowne obtuvimos ideas que nos permitieron demostrar esas cotas y hacer un conteo riguroso de ocurrencias.

Lema 1. *Dado $N \in \mathbb{N}$ y B bloque de longitud $k > 1$, entonces*

$$\mathcal{N}(B, c, 1, N) = 10^{-k}N + O(10^{n-k}),$$

donde la constante oculta en $O(10^{n-k})$ no depende de la elección de B.

Demostración. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $B = (b_1, \ldots, b_k)$.

Sabemos que $\mathcal{N}(B, c, 1, N) = \mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B, c, 1, N)$.

Para ayudar a la comprensión, separaremos la demostración pasos.

Paso 1: Acotamos primero $\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N)$, las ocurrencias no a caballo.

Para ello, primero debemos dar la siguiente definición:

Definición. Dado $\ell \in \mathbb{N}$, llamamos $U_{nc}(\ell, B)$ a la cantidad de ocurrencias no a caballo de B en s_ℓ. En otras palabras, $U_{nc}(\ell, B)$ es la cantidad de números de ℓ dígitos que contienen a B en su escritura.

Más adelante sumaremos sobre todos los posibles ℓ para poder obtener todas las ocurrencias no a caballo.

Paso 1.1: Acotamos $U_{nc}(\ell, B)$.
Probamos a continuación que vale:

$$U_{nc}(B, \ell) \leq 10^{\ell-k} + (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1}.$$

En efecto:
Si $\ell < k$, entonces $U_{nc}(\ell, B) = 0$, pues no cabe B dentro de un bloque de ℓ dígitos.
Si $\ell \geq k$: Queremos contar la cantidad de números de la forma:

$$y = \underbrace{* \ldots * B * \ldots *}_{\ell \text{ dígitos}}$$

donde el asterisco $(*)$ representa cualquier dígito posible.
Iremos moviendo la posición de B y contando en cada caso:

- Contamos la cantidad de números de la forma

$$y_0 = B \underbrace{* \ldots *}_{\ell - k \text{ dígitos}}$$

es decir, números de ℓ dígitos que contienen a B en la primera posición:
Si $b_1 = 0$: Hay 0 números de la forma de y_0, pues ningún número natural empieza con 0.
Si $b_1 \neq 0$: Hay $10^{\ell-k}$ números de la forma de y_0, pues podemos elegir los últimos $\ell - k$ dígitos entre 0 y 9.

- Contamos la cantidad de números de la forma

$$y_1 = \underbrace{\quad * \quad}_{1 \text{ dígito}} B \underbrace{* \ldots *}_{\ell - k - 1 \text{ dígitos}}$$

es decir, números de ℓ dígitos que contienen a B en la segunda posición:
Hay $\underbrace{9}_{\substack{\text{Elijo} \\ \text{el primer} \\ \text{dígito}}} \cdot \underbrace{10^{\ell-k-1}}_{\substack{\text{Elijo los} \\ \text{últimos} \\ \ell-k-1 \text{ dígitos}}}$ números de la forma y_1.

- Contamos la cantidad de números de la forma

$$y_2 = \underbrace{\ * * \ }_{2 \text{ dígitos}} B \underbrace{* \ldots *}_{\ell - k - 2 \text{ dígitos}}$$

es decir, números de ℓ dígitos que contienen a B en la tercera posición:
Hay $9 \cdot 10 \cdot 10^{\ell-k-2}$ números de la forma y_2. Pues:
- 9 es la cantidad de valores que puede tomar el primer dígito (entre 1 y 9 porque no puede tomar el valor 0).
- 10 es la cantidad de valores que puede tomar el segundo dígito (entre 0 y 9).
- $10^{\ell-k-2}$ es la cantidad de valores que pueden tomar los últimos $\ell - k - 2$ dígitos.

- Contamos la cantidad de números de la forma

$$y_3 = \underbrace{* * *}_{3 \text{ dígitos}} B \underbrace{* \ldots *}_{\ell - k - 3 \text{ dígitos}}$$

es decir, números de ℓ dígitos que contienen a B en la cuarta posición:
Hay $9 \cdot 10^2 \cdot 10^{\ell-k-3}$ números de la forma y_3.

Siguiendo así, llegamos a la última posición:

- Contamos la cantidad de números de la forma

$$y_{\ell-k} = \underbrace{* \ldots *}_{\ell - k \text{ dígitos}} B$$

es decir, números de ℓ dígitos que contienen a B en la posición $\ell - k + 1$:
Hay $9 \cdot 10^{\ell-k-1}$ números de la forma $y_{\ell-k}$.

De esta forma, obtenemos que para cada $j \in \{1, \ldots, \ell - k\}$, la cantidad de números de la forma y_j es

$$9 \cdot 10^{\ell-k-1}.$$

Por lo tanto,

Si $b_1 = 0$: $U_{nc}(B, \ell) = \sum_{j=1}^{\ell-k} 9 \cdot 10^{\ell-k-1} = (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1}$.

Si $b_1 \neq 0$: $U_{nc}(B,\ell) = 10^{\ell-k} + \sum_{j=1}^{\ell-k} 9 \cdot 10^{\ell-k-1} = 10^{\ell-k} + (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1}$.
Luego, para todo $\ell \geq k$,

$$U_{nc}(B,\ell) \leq 10^{\ell-k} + (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1},$$

como queríamos probar, cocnluyendo el Paso 1.1.

Paso 1.2: Escribimos $\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N)$ en función de $U_{nc}(B,\ell)$.

Recordemos que nuestro objetivo era acotar las ocurrencias no a caballo. Para eso, queremos escribir $\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N)$ en función de $U_{nc}(B,\ell)$. Para ello, necesitamos dar la siguiente definición:

Definición. Dado v, el número natural dentro del cual se realizan los N dígitos y n, la cantidad de dígitos de v, llamamos $\mathcal{N}_{nc}(B, v)$ a la cantidad de ocurrencias no a caballo de B en todos los números de n dígitos menores o iguales a v. Es decir, $\mathcal{N}_{nc}(B, v)$ es la cantidad de ocurrencias no a caballo de B dentro de s_n cortado en v: $(10^{n-1}, \ldots, v)$. O en otras palabras, $\mathcal{N}_{nc}(B, v)$ es la cantidad de números de la forma

$$y = \underbrace{* \ldots * \, B * \ldots *}_{n \text{ dígitos}} \qquad \text{con } y \leq v.$$

Habiendo entendido la última definición, podemos afirmar que vale la siguiente igualdad:

$$\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N) = \sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B,\ell) + \mathcal{N}_{nc}(B, v) + O(n)$$

Procedemos a demostrarla:
Para contar las ocurrencias no a caballo de B hasta el dígito N (es decir, $\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N)$), podemos contar primero las apariciones en s_ℓ para cada $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ (es decir, $U_{nc}(B,\ell)$), y después contar las apariciones en s_n cortándolo en v (es decir, $\mathcal{N}_{nc}(B, v)$). Por último, el $O(n)$ proviene de restar las posibles ocurrencias de B dentro de v después del dígito número N (a lo sumo podría haber $n-k$ de esas ocurrencias). Veamos un ejemplo para ilustrar:

Ejemplo. Si tomamos $N = 9523$, entonces $v = 2658$ y $n = 4$ pues:

$$c = 0, \underbrace{1 \ldots 9}_{\substack{9\cdot 1\\ \text{dígitos}}} \underbrace{10 \ldots 99}_{\substack{90\cdot 2\\ \text{dígitos}}} \underbrace{100 \ldots 999}_{\substack{900\cdot 3\\ \text{dígitos}}} \underbrace{1000 \ldots 2658}_{\substack{1658\cdot 4\\ \text{dígitos}}} \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ c_N}}{2658}}^{v}$$

Tomemos B un bloque cualquiera de dos dígitos, es decir $k = 2$.
Luego, para contar las ocurrencias no a caballo hasta N, tenemos

$$\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N) = \underbrace{U_{nc}(B, 2)}_{\substack{\text{ocurrencias}\\ \text{en } s_2}} + \underbrace{U_{nc}(B, 3)}_{\substack{\text{ocurrencias}\\ \text{en } s_3}} + \underbrace{\mathcal{N}_{nc}(B, v)}_{\substack{\text{ocurrencias}\\ \text{en } s_n \text{ hasta } v}} + \underbrace{O(n)}_{\substack{\text{ocurrencias}\\ \text{después de } c_N}}$$

porque

$$c = 0, \overbrace{1 \ldots 9}^{s_1} \overbrace{10 \ldots 99}^{s_2} \overbrace{100 \ldots 999}^{s_3} 1000 \ldots 2658 \ \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ c_N}}{2658}}^{v}$$

Luego, el procedimiento consiste en primero, contar las ocurrencias en s_1 (que son 0 porque $k = 2$), en s_2 y s_3; después, contar las ocurrencias desde 1000 hasta 2658; y por último, restar posibles ocurrencias en los útimos dos dígitos de v.

Sigamos con la demostración.
Por lo visto recién, para acotar todas las ocurrencias no a caballo, debemos calcular $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v)$.

Paso 1.3: Acotar $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v)$.

Si $n < k$: $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v) = 0$, porque, no cabe $\boldsymbol{B}$ dentro de bloques de tamaño n.

Si $n \geq k$:
Sea $v := \sum_{i=1}^{n} v_i 10^{n-i} = v_1 \dots v_n$.

Dado $j \in \{0, \dots, n-k\}$, definimos: $a_j := \sum_{i=1}^{j} v_i 10^{j-i} = v_1 \dots v_j$
Nuevamente, iremos moviendo la posición de $\boldsymbol{B}$ y contando en cada caso:
Dado $j \in \{0, \dots, n-k\}$, llamemos $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j)$ a la cantidad de números de la forma

$$y_j = \underbrace{* \dots *}_{j \text{ dígitos}} \ \boldsymbol{B} \ \underbrace{* \dots *}_{n-k-j \text{ dígitos}} \qquad \text{con } y_j \leq v$$

Entonces,
Si j = 0: Queremos contar la cantidad de números de la forma

$$y_0 = \boldsymbol{B} \ \underbrace{* \cdots *}_{n-k \text{ dígitos}}$$

Observamos que nuevamente, si $b_1 = 0$, entonces $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j) = 0$, pues no hay números que empiecen con un cero a la izquierda. Ahora, si $b_1 \neq 0$, debemos separar en casos, pues $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j)$ va a depender de quién es $\boldsymbol{B}$ y quién es v.

- Si $\boldsymbol{B} > v_1 \dots v_k$: $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j) = 0$, pues $y_0 > v$.
- Si $\boldsymbol{B} = v_1 \dots v_k$: $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j) = v_{k+1} \dots v_n + 1$, pues los últimos $n-k$ dígitos de y_0 los podemos elegir entre 0 y $v_{k+1} \dots v_n$.
- Si $\boldsymbol{B} < v_1 \dots v_k$: $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j) = 10^{n-k}$, pues los últimos $n-k$ dígitos de y_0 pueden tomar cualquier valor desde 0 hasta $\underbrace{9 \dots 9}_{n-k \text{ dígitos}}$.

Por lo tanto, $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, 0) \leq 10^{n-k}$.

Si $\mathbf{1 \leq j \leq n-k}$:

$$\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, j) = \underbrace{(a_j - 10^{j-1} + \theta_j)}_{\substack{\text{Elijo los primeros} \\ j \text{ dígitos}}} \ \underbrace{10^{n-k-j}}_{\substack{\text{Elijo los últimos} \\ n-k-j \text{ dígitos}}} = 10^{-k}\left(\sum_{i=1}^{j} v_i 10^{n-i} - 10^{n-1} + \theta_j 10^{n-j}\right)$$

donde $0 \leq \theta_j \leq 1$.
Pasamos a detallar un poco mejor por qué vale la primera igualdad:
Para que y_j sea efectivamente menor o igual que v, los primeros j dígitos los debemos elegir dentro de $(10^{j-1}, \dots, a_j)$. Ahora, depende de los valores de $\boldsymbol{B}$ y v, si estamos tomando a_j inclusive o exclusive.
Damos ejemplos para ilustrar:

Ejemplo. $\boldsymbol{B} = (3\ 1)$, $n = 4$, $v = 2\mathbf{32}5$ y $j = 1$.
Entonces, $\mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, v, 1) = \underbrace{2}_{\substack{\text{Elijo el} \\ \text{primer dígito} \\ \text{entre 1 y 2}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{Elijo el} \\ \text{cuarto dígito} \\ \text{entre 0 y 9}}} = (2 - 10^{1-1} + \theta_1)10^{4-2-1}$ con $\theta_1 = 1$.
En este caso, estamos tomando $a_j = 2$ inclusive.

Ejemplo. $B = (3\ 1)$, $n = 4$, $v = 2305$ y $j = 1$.
Entonces, $\mathcal{N}_{nc}(B, v, 1) = \underbrace{1}_{\substack{\text{El primer}\\ \text{dígito sólo}\\ \text{puede ser 1}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{Elijo el}\\ \text{cuarto dígito}\\ \text{entre 0 y 9}}} = (2 - 10^{1-1} + \theta_1)10^{4-2-1}$ con $\theta_1 = 0$.
En este caso, estamos tomando $a_j = 2$ exclusive.

Ejemplo. $B = (3\ 1)$, $n = 4$, $v = 2315$ y $j = 1$.
Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{nc}(B, v, 1) &= \underbrace{10}_{\substack{\text{Si el primer}\\ \text{dígito es 1,}\\ \text{elijo el cuarto}\\ \text{dígito entre 0 y 9}}} + \underbrace{6}_{\substack{\text{Si el primer}\\ \text{dígito es 2,}\\ \text{elijo el cuarto}\\ \text{dígito entre 0 y 5}}} \\
&= (2 - 10^{1-1})10^{4-2-1} + (10^{4-2-1} - 4) \\
&= (2 - 10^{1-1})10^{4-2-1} + 10^{4-2-1}(1 - \frac{4}{10}) \\
&= (2 - 10^{1-1} + \theta_1)10^{4-2-1},
\end{aligned}$$

con $\theta_1 = 1 - \dfrac{4}{10}$.

Ahora, habiendo calculado $\mathcal{N}_{nc}(B, v)$, llamamos M a la cantidad de dígitos desde 10^{n-1} hasta v, es decir, la cantidad de dígitos en s_n hasta el número v. Luego,

$$M = n(v - 10^{n-1} + 1) = n\left(\sum_{i=1}^{n} v_i 10^{n-i} - 10^{n-1} + 1\right).$$

Llamamos L a la cantidad de dígitos desde 1 hasta $10^{n-1}-1$, es decir, la cantidad de dígitos en $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Luego,

$$L = \sum_{j=1}^{n-1} j \cdot 9 \cdot 10^{j-1}.$$

Observemos que $N = L + M - O(n)$ pues en el peor caso, N cae en el primer dígito de v y tenemos que restar $n - 1$.
Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{nc}(B, v) &= \sum_{j=0}^{n-k} \mathcal{N}_{nc}(B, v, j) \\
&\le 10^{n-k} + 10^{-k}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j} v_i 10^{n-i} - 10^{n-1} + \theta_j 10^{n-j}\right) \\
&= 10^{-k}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j}(v_i 10^{n-i} - 10^{n-1}) + \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j}\theta_j 10^{n-j}\right) + O(10^{n-k}) \\
&\le 10^{-k}\left(-(n-k+1)10^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j} v_i 10^{n-i}\right) + 10^{-k}10^{n}\sum_{j=0}^{n-k} j\frac{1}{10^j} + O(10^{n-k}) \\
&= 10^{-k}\left(-(n-k+1)10^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j} v_i 10^{n-i}\right) + O(10^{n}) + O(10^{n-k}) \\
&\le 10^{-k}\left(-(n-k+1)10^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-k} v_i 10^{n-i}(n-k-i+1)\right) + O(10^{n-k}) \qquad (1) \\
&\le 10^{-k}M + O(10^{n-k}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Veamos por qué valen las últimas dos desigualdades:
(1) vale pues:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=1}^{j} v_i 10^{n-i} &= \sum_{i=1}^{0} v_i 10^{n-i} + \sum_{i=1}^{1} v_i 10^{n-i} + \dots \sum_{i=1}^{n-k} v_i 10^{n-i} \\
&= (v_1 10^{n-1}) + (v_1 10^{n-1} + v_2 10^{n-2}) + \dots + (v_1 10^{n-1} + \dots + v_{n-k} 10^{n-(n-k)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k} v_i 10^{n-i}(n-k-i+1)
\end{aligned}$$

(2) vale pues:

$$-(n-k+1)10^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-k} v_i 10^{n-i}(n-k-i+1) \leq -n10^{n-1} + 10^{n-1}(k-1) + n\sum_{i=1}^{n} v_i 10^{n-i} \leq M + O(10^n)$$

como queríamos.

Por lo tanto, podemos acotar todas las ocurrencias no a caballo, concluyendo el Paso 1:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{nc}(B, c, 1, N) &= \sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B, \ell) + \mathcal{N}_{nc}(B, v) - O(n) \\
&\leq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + (\ell-k)\cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1} + 10^{-k}M + O(10^{n-k}),
\end{aligned} \tag{3}$$

donde la constante oculta dentro de $O(10^{n-k})$ no depende de B.

Paso 2: Acotamos ahora $\mathcal{N}_c(B, c, 1, N)$, la cantidad de ocurrencias a caballo.

Observemos primero que si $k = 1$, no hay ocurrencias a caballo de B, por eso pedimos $k > 1$.

Ahora, de la misma forma en que hicimos para las ocurrencias no a cabllo, definimos:

Definición. dado $\ell \in \mathbb{N}$, llamamos $U_c(B, \ell)$ a la cantidad de ocurrencias a caballo en s_ℓ. Es decir, $U_c(B, \ell)$ es la cantidad de ocurrencias a caballo en $(\underbrace{10\dots0}_{\ell \text{ dígitos}}, \dots, \underbrace{9\dots9}_{\ell \text{ dígitos}})$.

Observamos que

$$\mathcal{N}_c(B, c, 1, N) \leq \sum_{\ell=1}^{n} U_c(B, \ell) + O(n).$$

Esto vale porque estamos considerando que en el peor de los casos N se realiza en el último dígito de v y $v = 10^n - 1 = \underbrace{9\dots9}_{n \text{ dígitos}}$, es decir el último número en s_n. En tal caso, deberíamos sumar cada $U_c(B, \ell)$ hasta $\ell = n$. Además, el $O(n)$ proviene de sumar todas las ocurrencias a caballo que podrían aparecer entre dos (o más) s_ℓ. A lo sumo hay kn de esas ocurrencias (k ocurrencias por cada s_ℓ), luego podemos acotarlas por una constante que no depende de B.

En conclusión, basta acotar $U_c(B, \ell)$.

Paso 2.1: Acotamos $U_c(B, \ell)$.

Si $\ell \geq k$: Observemos primero que al considerar bloques de longitud $\ell \geq k$, sólo puede haber ocurrencias a caballo entre dos bloques, y no más.
Ahora, dado x un número de ℓ dígitos, para que haya una ocurrencia a caballo de B entre x y $x + 1$, los

últimos dígitos de x deben ser $(b_1, \dots, b_{k-j})$ y los primeros dígitos de $x+1$ deben ser $(b_{k-j+1}, \dots, b_k)$ para algún $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Por lo tanto, x debe ser de la forma

$$x = b_{k-j+1} \dots b_k \underbrace{* \dots *}_{\ell-k \text{ dígitos}} b_1 \dots b_{k-j}.$$

Ahora, como hay $\ell - k$ dígitos libres, x a lo sumo puede tomar $10^{\ell-k}$ valores. Luego, para cada $j \in \{1, \dots, k-1\}$, B puede ocurrir a caballo en bloques de longitud ℓ a lo sumo $10^{\ell-k}$ veces. Por lo tanto,

$$U_c(B, \ell) \le \sum_{j=1}^{k-1} 10^{\ell-k} = (k-1)10^{\ell-k}.$$

Damos un ejemplo para ilustrar:

Ejemplo. Tomemos $\ell = 6$, $B = (1\,2\,3\,4)$, $k = 4$. Entonces, las ocurrencias a caballo de B son:

$$\begin{array}{ll} x & x+1 \\ 2\,3\,4 * * \mathbf{1} & \mathbf{2\,3\,4} * * 2 \\ 3\,4 * * \mathbf{1\,2} & \mathbf{3\,4} * * 1\,3 \\ 4 * * \mathbf{1\,2\,3} & \mathbf{4} * * 1\,2\,4 \end{array}$$

Luego, $U_c(B, \ell) = 3 \cdot 10^2$.

Observemos que en el ejemplo anterior vale la igualdad porque estamos considerando un bloque B con todos dígitos distintos. Pero, si B tiene dígitos iguales entre sí, podríamos estar contando una misma ocurrencia repetidas veces. Es por eso que conseguimos una cota para $U_c(B, \ell)$ y no una igualdad. Veamos un ejemplo:

Ejemplo. Tomemos $\ell = 6$, $B = (1\,1\,1\,1)$, $k = 4$. Entonces, las ocurrencias a caballo de B son:

$$\begin{array}{ll} x & x+1 \\ 1\,1\,1 * * \mathbf{1} & \mathbf{1\,1\,1} * * 2 \\ 1\,1 * * \mathbf{1\,1} & \mathbf{1\,1} * * 1\,2 \\ 1 * * \mathbf{1\,1\,1} & \mathbf{1} * * 1\,1\,2 \end{array}$$

Luego, $U_c(B, \ell) < 3 \cdot 10^2$.
Porque si dijéramos que $U_c(B, \ell) = 3 \cdot 10^2$, estaríamos contando, por ejemplo, dos veces a la ocurrencia que involucra a $x = 111011$ (una vez en la primer fila y otra vez en la segunda fila).

Si $\ell < k$: Para simplificar el trabajo, y como es suficiente para la cota que estamos buscando, vamos a acotar todas las ocurrencias a caballo de B desde s_1 hasta s_{k-1} por la cantidad de dígitos que hay desde s_1 hasta s_{k-1}, es decir la cantidad de dígitos en

$$1\,2 \dots 10\,11 \dots 100 \dots 999 \dots \underbrace{10^{k-1} - 1}_{\substack{=9\dots9 \\ (\text{Tiene } k-1 \text{ dígitos})}}.$$

Luego,

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} U_c(B, \ell) \le \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{9 \cdot 10^{i-1}}_{\substack{\text{Cantidad de} \\ \text{números en } s_i}} \cdot \underbrace{i}_{\substack{\text{cantidad} \\ \text{de} \\ \text{dígitos}}}.$$

Por lo tanto, podemos acotar todas las ocurrencias a caballo concluyendo el Paso 2:

$$\mathcal{N}_c(B, c, 1, N) \le \sum_{\ell=k}^{n} 10^{\ell-k}(k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} 9 \cdot 10^{j-1} \cdot j + O(n), \tag{4}$$

donde el $O(n)$ que restamos proviene de las ocurrencias a caballo que involucren dígitos de v ubicados después del dígito número N.

Entonces, utilizando para la segunda desigualdad las cotas obtenidas en (3) (cota del Paso 1) y (4) (cota del Paso 2), resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\boldsymbol{B}, c, 1, N) &= \mathcal{N}_{nc}(\boldsymbol{B}, c, 1, N) + \mathcal{N}_{c}(\boldsymbol{B}, c, 1, N) \\
&\leq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + 9(\ell-k)10^{\ell-k-1} + 10^{n-k} + 10^{-k}M + O(10^{n-k}) + \sum_{\ell=k}^{n} 10^{\ell-k}(k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} 9\cdot 10^{j-1}\cdot j \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + 9(\ell-k)10^{\ell-k-1} + 10^{-k}M + \sum_{\ell=k}^{n} 10^{\ell-k}(k-1) + O(10^{n-k}) \\
&\leq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k-1}(10 + 9\ell - 9k + 10k - 10) + 10^{n-k}(k-1) + 10^{-k}M + O(10^{n-k}) \\
&= 10^{-k}\sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-1}\cdot 9\cdot \ell + 10^{-k}\cdot k\cdot \frac{1}{10}\sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell} + O(10^{n-k}) + 10^{-k}M + O(10^{n-k}) \\
&\leq 10^{-k}L + 10^{-k}\cdot k\cdot \frac{1}{10}\left(\frac{1-10^{n}}{-9} - \frac{1-10^{k}}{-9}\right) + O(10^{n-k}) + 10^{-k}M + O(10^{n-k}) \\
&= 10^{-k}L + O(10^{n-k}) + 10^{-k}M + O(10^{n-k}) \\
&= 10^{-k}N + O(10^{n-k}).
\end{aligned}$$

□

4.2. Demostración del Teorema 1

Utilizamos aquí únicamente las ideas de Schiffer, desglosando pasos y detalles que él no explicita.

Demostración del Teorema 1. Queremos probar que

$$D(c, N) = O\left(\frac{1}{\log N}\right),$$

es decir que exsite $N_0 \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que $D(c, N) \leq C\frac{1}{\log N}$, para todo $N \geq N_0$.

Recordemos que habíamos definido

$$D(c, N) := D_N\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (10^{n-1}c \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para simplificar la notación, dados $0 \leq a < b < 1$ y $N \in \mathbb{N}$, llamamos:

$$D_N(a, b) := \frac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, b)\}}{N} - (b - a).$$

Es decir,

$$\sup_{0\leq a<b<1} |D_N(a, b)| = D(c, N),$$

donde omitimos la c del lado izquierdo ya que en la demostración sólo trabajaremos con el número de Champernowne.

Luego, para acotar la discrepancia de c deberíamos tomar supremo de $|D_N(a, b)|$ sobre todos los intervalos $[a, b) \subseteq [0, 1)$. Veamos primero que alcanza con probarlo para intervalos de la forma $[0, b)$: Supongamos que lo tenemos probado para todo intervalo de la forma $[0, b)$, es decir:

$$\sup_{0\leq b<1} |D_N(0, b)| = \sup_{0<b<1} \left|\frac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, b)\}}{N} - b\right| \leq \frac{K}{\log N}, \quad \forall N \gg 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|D_N(a, b)| &= \left|\frac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, b)\} - \#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, a)\}}{N} - b + a\right| \\
&\leq \left|\frac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, b)\}}{N} - b\right| + \left|\frac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [0, a)\}}{N} - a\right| \\
&\leq 2 \sup_{0\leq y<1} |D_N(0, y)| \\
&\leq 2\frac{K}{\log N} \\
&= \frac{C}{\log N}, \quad \forall N \gg 1.
\end{aligned}$$

Luego, basta probar que $\sup_{0\leq b<1} |D_N(0, b)| \leq \frac{K}{\log N}, \quad \forall N \gg 1.$

Es decir, basta ver que $|D_N(0, b)| = O\left(\frac{1}{\log N}\right)$, para todo $b \in [0, 1)$, donde la constante oculta en la O de Landau no depende de b.

Nuevamente, para ayudar a la comprensión separaremos la demostración en tres pasos.

Paso 1: Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, 1)$, $\alpha = 0.\alpha_1 \dots \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 10^{-i}$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Probemos primero que

$$|D_N(\alpha, \alpha + 10^{-k})| = O\left(\frac{10^{-k}}{\log N}\right),$$

cuya constante no depende de α.

Al igual que como hicimos anteriormente al analizar la equivalencia de Wall, podemos observemos que $[\alpha, \alpha + 10^{-k})$ está formado por todos los números en $[0, 1)$ cuyos primeros k dígitos después de la coma son $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Luego, si tomamos $B := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, vale que:

$$\#\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in [\alpha, \alpha + 10^{-k})\} = \sum_{\substack{n=1 \\ (c_n, \dots, c_{n+k-1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)}}^{N} 1 = \mathcal{N}(B, c, 1, N) + O(k),$$

donde, recordemos, c_i es el dígito número i en la expansión de Champernowne y

$$x_n \quad = \quad 10^{n-1} c \quad \text{mód } 1 \quad = \quad 0, c_n\, c_{n+1}\, c_{n+2} \dots .$$

Además, el $O(k)$ proviene de contar las posibles ocurrencias que podría haber después del dígito c_N y hasta el dígito C_{N+k-1}.
Luego, usando el Lema 1 en la segunda igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} |D_N(\alpha, \alpha + 10^{-k})| &= \left| \frac{1}{N} \mathcal{N}(B, x, 1, N) - 10^{-k} + O\left(\frac{k}{N}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} 10^{-k} N + O\left(\frac{1}{N} 10^{n-k}\right) - 10^{-k} + O\left(\frac{k}{N}\right) \right| \\ &= \left| 10^{-k} + O\left(\frac{1}{\log N} 10^{-k}\right) - 10^{-k} + O\left(\frac{k}{N}\right) \right| \qquad (5) \\ &= O\left(\frac{1}{\log N} 10^{-k}\right), \end{aligned}$$

para N suficientemente grande (pues k está fijo). Más adelante tomaremos k y N adecuados. Por otro lado, notemos que por el Lema 1, la constante oculta dentro de $O\left(\frac{10^{-k}}{\log N}\right)$ no depende de α.

Veamos en detalle por qué vale la igualdad (5). Sabemos que:

$$\sum_{j=1}^{n-1} 9j 10^{j-1} = L \leq N \leq L + M = \sum_{j=1}^{n} 9j 10^{j-1} = n 10^n - \frac{10^n}{9} + \frac{1}{9}$$

donde L era la cantidad de dígitos desde s_1 hasta s_n, y M era la cantidad de dígitos dentro de s_n hasta el número v.

Veamos que $O(10^n/N) \leq O(1/\log N)$. Para ver esto, probemos que para N suficientemente grande

$$10^n/N < 2/\log N,$$

que lo podemos escribir

$$\log N < 2N/10^n.$$

Por un lado, por definición de N,

$$\log N < n + \log n,$$

y tambien por definición de N

$$\frac{2N}{10^n} \geq \frac{2}{10^n}\left((n-1)10^{n-1} - \frac{10^{n-1}}{9} + \frac{1}{9}\right) \geq 2\left((n-1) - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{10} \geq 2\left(n - 1 - \frac{1}{9}\right) \geq n + \log n.$$

Por lo tanto,

$$\log N < n + \log n < 2N/10^n.$$

como queríamos probar.

Así concluímos el Paso 1: $|D_N(\alpha, \alpha + 10^{-k})| = O\left(\frac{10^{-k}}{\log N}\right)$.

Paso 2: Sean $h \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in [0,1)$, $\gamma = 0.\gamma_1 \dots \gamma_h = \sum_{i=1}^{h} \gamma_i 10^{-i}$. Probemos ahora que

$$|D_N(0,\gamma)| = O\left(\frac{1}{\log N}\right),$$

cuya constante no depende de γ.
Es decir, en este paso queremos probar el resultado deseado pero sólo para intervalos cuyos extremos γ son números con expansión decimal finita.
Sean $k \in \{1, \dots, h\}$ y $j \in \{0, \dots, \gamma_k\}$.
Definimos $\lambda_{k,j} := \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i 10^{-i} + j10^{-k} = 0.\gamma_1 \dots \gamma_{k-1}\, j$.
Luego, vale que $\lambda_{k,j+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i 10^{-i} + (j+1)10^{-k} = \lambda_{k,j} + 10^{-k}$.
Observamos:

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{1,0} = 0\,, & \lambda_{1,1} = 0{,}1\,, & \dots & \lambda_{1,\gamma_1} = 0.\gamma_1 \\
\lambda_{2,0} = 0.\gamma_1\,, & \lambda_{2,1} = 0.\gamma_1 1\,, & \dots & \lambda_{2,\gamma_2} = 0.\gamma_1\gamma_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda_{h,0} = 0.\gamma_1 \dots \gamma_{h-1}\,, & \lambda_{h,1} = \gamma_1 \dots \gamma_{h-1} 1\,, & \dots & \lambda_{h,\gamma_h} = 0.\gamma_1 \dots \gamma_h = \gamma
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \sum_{j=0}^{\gamma_k - 1} D_N(\lambda_{k,j}, \lambda_{k,j+1}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=0}^{\gamma_k - 1} \chi_{[\lambda_{k,j}, \lambda_{k,j+1})}(x_n) - \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=0}^{\gamma_k - 1} 10^{-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,\gamma)}(x_n) - \sum_{k=1}^{h} \gamma_k 10^{-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,\gamma)}(x_n) - \gamma \\
&= D_N(0,\gamma)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|D_N(0,\gamma)| &\leq \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=0}^{\gamma_k - 1} |D_N(\lambda_{k,j}, \lambda_{k,j+1})| \\
&= \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=0}^{\gamma_k - 1} D_N(\lambda_{k,j}, \lambda_{k,j} + 10^{-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{h} O\left(\frac{10^{-k}}{\log N}\right) \qquad \text{Por el paso 1 (tomando } N \text{ suficientemente grande)} \\
&= O\left(\frac{1}{\log N}\right).
\end{aligned}$$

Notemos que la constante oculta en $O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ no depende de γ, ni de h, pues

$$\sum_{k=1}^{h} O\left(\frac{10^{-k}}{\log N}\right) \leq O\left(\frac{1}{\log N}\right)\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \leq O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Paso 3: Sea $\beta \in [0,1)$, probemos finalmente que $|D_N(0,\beta)| = O\left(\frac{1}{\log N}\right)$.
Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomemos $h := [\log(\log N))]$, es decir N suficientemente grande.
Si β tiene una expansión decimal finita, entonces estamos en el caso del Paso 2 y no hay nada más que hacer.
De lo contrario, $\beta = 0.\beta_1\beta_2\ldots\beta_h\beta_{h+1}\ldots$.

Tomemos $\alpha, \gamma \in [0,1)$ tales que:

$$\begin{aligned}
&\alpha \leq \beta \leq \gamma,\\
&\gamma - \alpha = 10^{-h},\\
&\alpha 10^h \in \mathbb{N},\\
&\gamma 10^h \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\alpha := 0.\beta_1\ldots\beta_h \ \text{ y } \ \gamma := \alpha + 10^{-h}.$$

Entonces,

$$D_N(0,\beta) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{[0,\beta)}(x_n) - \beta \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{[0,\beta)}(x_n) - \gamma + \gamma - \alpha = D_N(0,\gamma) + 10^{-h}$$

Análogamente,

$$D_N(0,\beta) \geq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{[0,\beta)}(x_n) - \alpha + \alpha - \gamma = D_N(0,\alpha) - 10^{-h}.$$

Luego, $D_N(0,\alpha) - 10^{-h} \leq D_N(0,\beta) \leq D_N(0,\gamma) + 10^{-h}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|D_N(0,\beta)| &\leq \text{máx}\{|D_N(0,\alpha) - 10^{-h}|, |D_N(0,\gamma) + 10^{-h}|\}\\
&\leq \text{máx}\{|D_N(0,\alpha)|, |D_N(0,\gamma)|\} + 10^{-h}\\
&= O\left(\frac{1}{\log N}\right) + 10^{-h} \qquad \text{Por el paso 2}\\
&= O\left(\frac{1}{\log N}\right).
\end{aligned}$$

□

5. Teorema 2: Cota inferior

5.1. Bloques Testigos

Recordemos el enunciado del Teorema 2:

Teorema 2. *Sea c el número de Champernowne en base 10. Entonces, existe una constante $K > 0$ tal que hay infinitos N para los cuales*

$$D(c, N) > \frac{K}{\log N}.$$

Más aún, vale para la constante $K = 1/9$.

Este teorema nos pide encontrar una cota inferior de la discrepancia. La demostración que damos se basa en la noción de que la discrepancia nos dice cuánto difieren la cantidad de ocurrencias de *cada* bloque de igual tamaño. Luego, como buscamos una cota inferior, Schiffer nota que basta encontrar solamente dos *bloques testigos*, uno cuyas ocurrencias estén en exceso y otro en defecto, para que la diferencia de sus respectivas ocurrencias nos proporcione la cota buscada.

A continuación, formalizaremos esta idea en el Lema 2, y luego lo utilizaremos en la demostración del Teorema 2.

El enunciado y la demostración del Lema 2 se deben a Schiffer [11, Lema 2]. Al igual que en el Teorema 1, para la demostración del Teorema 2 seguimos el esquema que utiliza Schiffer en su versión general y usamos algunas de sus ideas para obtener determinadas cotas, pero siempre fusionándolo con conteos rigurosos del estilo de Champernowne.

Lema 2. *Sea $\alpha \in [0, 1)$. Sean B_1 y B_2 bloques de igual longitud k. Si existe una constante $C > 0$ tal que para infinitos $N \in \mathbb{N}$ vale*

$$\left|\mathcal{N}(B_1, \alpha, 1, N) - \mathcal{N}(B_2, \alpha, 1, N)\right| > C\frac{N}{\log(N)},$$

entonces, existe una constante $K > 0$ tal que para infinitos $N \in \mathbb{N}$,

$$D(N, \alpha) > \frac{K}{\log(N)}.$$

Más aún, vale para la constante $K = C/3$.

A los bloques B_1 y B_2 que cumplen esta hipótesis los llamaremos bloques testigos.

Demostración. Sean $B_1 = (b_1 \dots b_k)$, $B_2 = (d_1 \dots d_k)$ y $\alpha = 0.\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \dots \in [0, 1)$.
Llamamos:

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= 0.b_1 \dots b_k = \sum_{i=1}^{k} b_i 10^{-i} \quad \text{y} \quad \beta_2 := 0.d_1 \dots d_k = \sum_{i=1}^{k} d_i 10^{-i} \\ I_1 &:= [\beta_1,\ \beta_1 + 10^{-k}) \subseteq [0, 1) \quad \text{y} \quad I_2 := [\beta_2,\ \beta_2 + 10^{-k}) \subseteq [0, 1). \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha \in I_1 \iff (\alpha_1 \dots \alpha_k) = (b_1, \dots, b_k)$.
Y $\alpha \in I_2 \iff (\alpha_1 \dots \alpha_k) = (d_1, \dots, d_k)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N + k - 1$ cumple la hipótesis del enunciado, es decir,

$$\left|\mathcal{N}(B_1, \alpha, 1, N + k - 1) - \mathcal{N}(B_2, \alpha, 1, N + k - 1)\right| > C\frac{N + k - 1}{\log(N + k - 1)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
D(N,\alpha) &= D_N((10^{n-1}\alpha \mod 1)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \sup_{0\le a<b<1}\left|\frac{\#\{n\in\{1,\dots,N\} : 10^{n-1}\alpha \mod 1 \in [a,b)\}}{N} - (b-a)\right| \\
&\ge \max_{i=1,2}\left|\frac{\#\{n\in\{1,\dots,N\} : 10^{n-1}\alpha \mod 1 \in I_i\}}{N} - 10^{-k}\right| \\
&= \max_{i=1,2}\left|\frac{\mathcal{N}(B_i,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right| && (6)\\
&\ge \frac{\left|\mathcal{N}(B_1,\alpha,1,N+k-1)-\mathcal{N}(B_2,\alpha,1,N+k-1)\right|}{2N} && (7)\\
&> \frac{C(N+k-1)}{2N\log(N+k-1)} \\
&\ge \frac{C}{2\log(N+k-1)} \\
&\ge \frac{K}{\log(N)}, && (8)
\end{aligned}$$

como queríamos.

Detallamos algunas desigualdades:
(6) Vale pues:

$$10^{n-1}\alpha \mod 1 \in I_1 \iff \alpha_n = b_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n+k-1} = b_k \iff B_1 \text{ ocurre en } (\alpha_n,\dots,\alpha_{n+k-1})$$

Y análogamente, vale para B_2.
Además, para entender los extremos, observemos que: Cuando $n = 1$, debemos considerar las ocurrencias en $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, por eso arrancamos en 1. Y cuando $n = N$, debemos considerar las ocurrencias en $(\alpha_N,\dots,\alpha_{N+k-1})$, por eso terminamos en $N+k-1$.

(7) Vale pues:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\mathcal{N}(B_1,\alpha,1,N+k-1)-\mathcal{N}(B_2,\alpha,1,N+k-1)\right|}{2N} &= \frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{N}(B_1,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right. \\
&\qquad \left. -\left(\frac{\mathcal{N}(B_2,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\mathcal{N}(B_1,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right|\right. \\
&\qquad \left. +\left|\frac{\mathcal{N}(B_2,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right|\right) \\
&\le \frac{1}{2}2\max_{i=1,2}\left|\frac{\mathcal{N}(B_i,\alpha,1,N+k-1)}{N} - 10^{-k}\right|
\end{aligned}$$

(8) A continuación, explicitamos dos posibles constantes K que sirven para probar esta desigualdad:

- Tomamos $K_1 = \dfrac{C}{2\ \log(k-1)}$.
  Entonces,
  $$\frac{K}{\log(N)} = \frac{C}{2\ \log(N)\log(k-1)} = \frac{C}{2\ \log(N+k-1)}$$
  Observemos que para utilizar esta constante K_1 debemos pedir $k > 2$.

- Tomamos $K_2 = C/3$.
Observemos que para N suficientemente grande, $N + k - 1 \leq 10N$ porque k está fijo. Luego,

$$\frac{C}{2\log(N+k-1)} \geq \frac{K}{\log(N)} = \frac{C}{3\log(N)} \iff 3\log(N) \geq 2\log(N+k-1).$$

Y esta última desigualdad vale para N suficientemente grande pues:

$$\frac{3\log(N)}{2\log(N+k-1)} \geq \frac{3\log(N)}{2\log(10N)} = \frac{3\log(N)}{2(1+\log(N))} > \frac{3\log(N)}{2+2\log(N)} \geq 1$$

La constante K_2 es la que explicita el enunciado del Lema por ser una constante más simple. Sin embargo, quisimos mencionar la posible constante K_1 porque más adelante, en la demostración del Teorema 2, veremos que K_1 nos permite mejorar la cota. □

5.2. Demostración del Teorema 2

Demostración del Teorema 2. Queremos usar el Lema 2: Sean B_1 y B_2 de igual longitud $k \geq 2$, definidos como: $B_2 = (0 \dots 0)$ el bloque de todos ceros, y $B_1 = (1\ 1\ *\ \dots\ *)$, donde el asterisco $(*)$ respresenta cualquier dígito entre 0 y 9.

Aquí nos gustaría hacer una aclaración sobre la elección de k, y de B_1 y B_2, los cuales serán nuestros bloques testigos. Como no encontramos un análisis de la misma en Schiffer, nos proponemos responder las siguientes preguntas una vez terminada la demostración:

1. Por qué $k \neq 1$.
2. Por qué B_2 se elige como el bloque de todos ceros.
3. Qué otros B_1 podríamos tomar.
4. Cómo cambia la constante K del Teorema 2, si cambiamos los bloques testigos.

Ahora, volviendo a la demostración, para poder usar el Lema 2, debemos ver que existe una constante C tal que para infinitos $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\mathcal{N}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}(B_2, c, 1, N)\right| > C\frac{N}{\log(N)}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$, observemos que:

$$\left|\mathcal{N}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}(B_2, c, 1, N)\right| = \left|\mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B_1, c, 1, N) - \left(\mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B_2, c, 1, N)\right)\right|$$

Calculamos primero $\mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N)$, es decir la diferencia de las ocurrencias no a caballo.

Dado $\ell \in \mathbb{N}$, calculamos $U_{nc}(\ell, B_1) - U(\ell, B_2)$. Recordemos en el Lema 1 definimos $U_{nc}(\ell, B_i)$ como la cantidad de ocurrencias no a caballo de B_i en $s_\ell = (10^{\ell-1}, \dots, 10^\ell - 1) = (\underbrace{10\dots0}_{\ell \text{ dígitos}}, \dots, \underbrace{9\dots9}_{\ell \text{ dígitos}})$.

Al igual que en el Lema 1, más adelante sumaremos sobre todos los posibles ℓ.

Ahora, utilizando el valor de $U_{nc}(\ell, B_i)$ que hemos calculado anteriormente, obtenemos que:

Si $l < k$: $U_{nc}(\ell, B_i) = 0$, para $i = 1, 2$.

Si $l \geq k$:

$U_{nc}(\ell, B_1) = 10^{\ell-k} + (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1}$ pues el primer dígito de B_1 es distinto de 0.

$U_{nc}(\ell, B_2) = (\ell - k) \cdot 9 \cdot 10^{\ell-k-1}$ pues el primer dígito de B_2 es 0.

Por lo tanto,

$$U_{nc}(\ell, B_1) - U_{nc}(\ell, B_2) = 10^{\ell-k} \quad \forall \ell \geq k \tag{9}$$

Observación 1. Acá estamos usando que el primer dígito de B_2 es cero y que el de B_1 es distinto de cero.

Ahora, como vimos en la demostración del Lema 1, vale que:

$$\mathcal{N}_{nc}(B_i, c, 1, N) = \sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B_i, \ell) + \mathcal{N}_{nc}(B_i, v) - O(n)$$

donde $\mathcal{N}_{nc}(B_i, v)$ era la cantidad de ocurrencias no a caballo de B_i en todos los números de n dígitos (es decir, en s_n) menores o iguales a v.

Luego, para obtener $\mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N)$, debemos calcular $\mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v)$. Volvemos a usar los argumentos utilizados en la demostración del Lema 1:

Si $n < k$: $\mathcal{N}_{nc}(B_i, v) = 0$.

Si $n \geq k$: Recordemos que en el Lema 1 teníamos $v = v_1 \dots v_n$, y para cada $j \in \{0, \dots, n-k\}$, tomábamos $a_j = v_1 \dots v_j$, y llamábamos $\mathcal{N}_{nc}(B, v, j)$ a la cantidad de números de la forma

$$y_j = \underbrace{* \dots *}_{j \text{ dígitos}} \; B \; \underbrace{* \dots *}_{n-k-j \text{ dígitos}} \quad \text{con } y_j \leq v.$$

Entonces,

Si j = 0: Queremos contar la cantidad de números de la forma

$$y_0 = B_i \underbrace{* \cdots *}_{n-k \text{ dígitos}} \quad \text{con } y_0 \leq v.$$

Observamos que nuevamente, como el primer dígito de B_2 es cero, $\mathcal{N}_{nc}(B_2, v, 0) = 0$, es decir no hay ocurrencias de B_2 de este tipo. Pero, sí podría haber de B_1 (dependerá de quién es B_1 y quién es v). Luego, usando lo visto en la demostración del Lema 1, vale:

$$\mathcal{N}_{nc}(B_1, v, 0) \leq 10^{n-k} \text{ y } \mathcal{N}_{nc}(B_2, v, 0) = 0.$$

Si 1 ≤ j ≤ n − k: Recordemos que lo que buscamos es $\mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v)$. Luego, queremos calcular $\mathcal{N}_{nc}(B_1, v, j) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v, j)$.

Observamos primero que la cantidad de números de la forma y_j con los primeros j dígitos menores que a_j es igual para B_1 y B_2 (pues en tal caso, $y_j < v$ sin importar quiénes son B_1 y B_2). Luego, al hacer la diferencia se cancela.

Por otro lado, si los primeros j dígitos de y_j son mayores que a_j, entonces $y_j > v$ tanto para B_1 como para B_2, así que esos números no cuentan como ocurrencias a considerar, es decir no suman a $\mathcal{N}_{nc}(B_i, v, j)$.

Por último, nos queda el caso en el que los primeros j dígitos de y_j son iguales a a_j. Allí, la cantidad de ocurrencias B_1 sí podría ser distinta a la de B_2. Analizamos este caso, con los mismos razonamientos usados en el Lema 1. Llamemos $\Delta_j(B_i)$ a la cantidad de números de la forma

$$y_j = v_1 \dots v_j \; B_i \underbrace{* \dots *}_{n-k-j \text{ dígitos}} \quad \text{con } y_j \leq v.$$

- Si $B_i > v_{j+1} \dots v_{j+k}$: $\Delta_j(B_i) = 0$, pues en tal caso $y_j > v$.
- Si $B_i = v_{j+1} \dots v_{j+k}$: $\Delta_j(B_i) = v_{j+k+1} \dots v_n + 1$, pues los útlimos $n-k-j$ pueden tomar cualquier valor desde 0 hasta $v_{j+k+1} \cdots v_n$.
- Si $B_i < v_{j+1} \dots v_{j+k}$: $\Delta_j(B_i) = 10^{n-k-j}$, pues los últimos $n-k-j$ pueden tomar cualquier valor desde 0 hasta $\underbrace{9 \dots 9}_{n-j-k}$.

Por lo tanto, $\Delta_j(B_i) \leq 10^{n-k-j} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-k\}$.

Así, concluimos que si tomamos N tal que $n \geq k$, tenemos:

$$\mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v) = \mathcal{N}_{nc}(B_1, v, 0) + \sum_{j=1}^{n-k} \mathcal{N}_{nc}(B_1, v, j) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v, j) = \mathcal{N}_{nc}(B_1, v, 0) + \sum_{j=1}^{n-k} \Delta_j(B_1) - \Delta_j(B_2) \tag{10}$$

Observación. Como $B_2 \leq B_1$, entonces $0 \leq \Delta_j(B_1) \leq \Delta_j(B_2)$. Pues:

$$v_1 \ldots v_j \; B_1 \underbrace{* \cdots *}_{\substack{n-k-j \\ \text{dígitos}}} \leq v \quad \Rightarrow \quad v_1 \ldots v_j \; B_2 \underbrace{* \cdots *}_{\substack{n-k-j \\ \text{dígitos}}} \leq v.$$

Luego,

$$0 \leq \Delta_j(B_1) - \Delta_j(B_2) \leq 10^{n-k-j}. \tag{11}$$

Entonces, para todo N tal que $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N) &= \sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B_1, \ell) + \mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - O(n) - \left(\sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B_2, \ell) + \mathcal{N}_{nc}(B_2, v) - O(n) \right) \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} U_{nc}(B_1, \ell) - U_{nc}(B_2, \ell) + \mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v) + O(n) \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + \mathcal{N}_{nc}(B_1, v) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, v) + O(n) \qquad \text{Usando (9)} \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + \mathcal{N}_{nc}(B, v, 0) + \sum_{j=1}^{n-k} \Delta_j(B_1) - \Delta_j(B_2) + O(n) \qquad \text{Usando (10)} \\
&\geq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + \sum_{j=1}^{n-k} \Delta_j(B_1) - \Delta_j(B_2) + O(n) \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{j=1}^{n-k} \Delta_j(B_2) - \Delta_j(B_1) + O(n) \\
&\geq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{j=1}^{n-k} 10^{n-j-k} + O(n) \qquad \text{Usando (11)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Contamos ahora las ocurrencias a caballo.

Observación 2. Como B_2 es el bloque de todos ceros, no tiene ocurrencias a caballo (pues ningún número empieza con ceros a la izquierda).

Ahora veamos qué pasa con las ocurrencias a caballo de B_1. En vez de contar todas las ocurrencias a caballo de B_1, nos bastará con contar algunas de ellas para poder obtener la cota buscada y verificar la hipótesis del Lema 2.

Recordemos que $B_1 = (1 \; 1 \underbrace{* \cdots *}_{k-2 \text{ dígitos}}) =: (b_1 b_2 \ldots b_k)$. Luego, definimos para cada $\ell \in \mathbb{N}$,

$$M_\ell := \{ m \in \mathbb{N} : m = \underbrace{b_2 b_3 \ldots b_k \overbrace{* \cdots *}^{\ell-k \text{ dígitos}} b_1}_{\ell \text{ dígitos}} = b_2 10^{\ell-1} + b_3 10^{\ell-2} + \ldots + b_k 10^{\ell-k+1} + \ldots + b_1 \}$$

Es decir, M_ℓ es la cantidad de números naturales de ℓ dígitos, cuyos primeros $k-1$ dígitos son $(b_2\, b_3 \dots b_k)$, y su último dígito es b_1.

Si $\ell < k$: $\#M_\ell = 0$.
Si $\ell \geq k$: $\#M_\ell = 10^{\ell-k}$, pues hay $\ell - k$ dígitos libres.

Observación 3. Estamos usando que $b_2 \neq 0$, pues si no, estaríamos buscando $m \in \mathbb{N}$ que empieza con un cero a la izquierda.

Ahora, observemos que por cada elemento de M_ℓ, tenemos una ocurrencia a caballo de B_1 entre dos números de ℓ dígitos. Luego,

$$U_c(B_1, \ell) \geq 10^{\ell-k} \quad \forall \ell \geq k \tag{13}$$

donde, recordemos, $U_c(B_1, \ell)$ era la cantidad de ocurrencias a caballo de B_1 en s_ℓ.

Observación 4. Estamos usando:

- $k \neq 1$, pues si no, no habría ocurrencias a caballo de B_1.
- $b_1 \neq 9$, pues si no, podría pasar que $m = b_2\, 9 \dots 9$ y entonces $m+1$ no tiene de primer dígito a b_2, y por ende, no produce una ocurrencia a caballo.

Por lo tanto, para todo N tal que $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}(B_2, c, 1, N) &= \mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B_1, c, 1, N) - \big(\mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B_2, c, 1, N)\big) \\
&= \mathcal{N}_{nc}(B_1, c, 1, N) - \mathcal{N}_{nc}(B_2, c, 1, N) + \mathcal{N}_c(B_1, c, 1, N) - \underbrace{\mathcal{N}_c(B_2, c, 1, N)}_{=0} \\
&\geq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{j=1}^{n-k} 10^{n-j-k} + O(n) + \mathcal{N}_c(B_1, c, 1, N) \qquad \text{Usando (12)} \\
&\geq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{j=1}^{n-k} 10^{n-j-k} + O(n) + \sum_{l=1}^{n-1} U_c(B_1, \ell) \\
&\geq \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{j=1}^{n-k} 10^{n-j-k} + O(n) + \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} \qquad \text{Usando (13)} \\
&= 2\sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} - \sum_{m=k}^{n-1} 10^{m-k} + O(n) \qquad \text{Cambio de variable } m = n - j \\
&= \sum_{\ell=k}^{n-1} 10^{\ell-k} + O(n) \\
&> 10^{n-1-k} + O(n) \\
&= \frac{1}{k+1} 10^n \\
&= C 10^n \qquad \text{donde } C := \frac{1}{k+1} \\
&\geq C \frac{N}{\log(N)}
\end{aligned}$$

Probemos en detalle la última desigualdad:
Observemos primero que, como n es la cantidad de dígitos de v, número donde se realiza N, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{j}_{\substack{\text{Cantidad de}\\ \text{dígitos de}\\ \text{cada número}}} \cdot \underbrace{9 \cdot 10^{j-1}}_{\substack{\text{Cantidad}\\ \text{de números}\\ \text{en } s_j}} \leq N \leq \sum_{j=1}^{n} j \cdot 9 \cdot 10^{j-1}$$

Además vale que para todo $r \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{r} j \cdot 9 \cdot 10^{j-1} = 10^r r - \frac{10^r}{9} + \frac{1}{9}$

Luego,

$$N \geq \sum_{j=1}^{n-1} j \cdot 9 \cdot 10^{j-1} = 10^{n-1} n - 1 - \frac{10^{n-1}}{9} + \frac{1}{9} > 10^{n-1}(n - 1 - \frac{1}{9})$$

Por lo tanto

$$\log(N) \geq n - 1 + \log(n - \frac{10}{9})$$

Entonces,

$$C \log(N) 10^n \geq C \left(n - 1 + \log(n - \frac{10}{9})\right) 10^n \geq C \left(10^n n - \frac{10^n}{9} + \frac{1}{9}\right) = C \sum_{j=1}^{n} j \cdot 9 \cdot 10^{j-1} \geq CN$$

Obtuvimos que se cumple la hipótesis del Lema 2 y por ende, vale que para infinitos $N \in \mathbb{N}$,

$$D(N, x) > \frac{K}{\log N} \quad \text{como se quería.}$$

Por último, explicitemos la constante K. En el Lema 2 vimos que podemos tomar $K = C/3$. Luego, si tomamos $k = 2$ (el valor más chico que puede tomar k), obtenemos:

$$K = \frac{C}{3} = \frac{1}{3(k+1)} = \frac{1}{9}.$$

□

Observación. Respondemos las preguntas hechas al principio de la demostración:

1. Pedimos $k \neq 1$ para que haya ocurrencias a caballo de B_1 (en la Observación 4).

2. Necesitamos que el primer dígito de B_2 sea cero para que haya una diferencia entre las ocurrencias no a caballo de B_1 y B_2 (por la Observación 1). Además, usamos que B_2 es el bloque de todos ceros para que no tenga ocurrencias a caballo (en la Observación 2).

3. B_1 debe cumplir que su primer dígito sea, por un lado, distinto de 0 para que haya una diferencia entre las ocurrencias no a caballo de B_1 y B_2 (Observación 1), y por otro lado, que sea distinto de 9 (por la Observación 4). Además, pedimos que el segundo dígito de B_1 sea distinto de 0 (por la Observación 3). Cualquier elección de B_1 que cumpla esas condiciones sirve.

4. La constante K sólo depende de k, la longitud de los bloques. Recordemos que en la demostración del Lema 2, dimos dos opciones para la constante K.

Opción 1: $K_1 = \dfrac{C}{2\log(k-1)} = \dfrac{1}{2(k+1)\log(k-1)}$. Luego, el valor más chico de k que podemos tomar es 3, y quedaría $K_1 = \dfrac{1}{2\cdot 4\log(2)}$.

Opción 2: $K_2 = \dfrac{C}{3} = \dfrac{1}{9}$.

De esta forma $K_1 > K_2$, por lo que K_1 sería mejor cota.

Damos a continuación un ejemplo de posibles elecciones de k, B_1 y B_2 para ilustrar la idea de bloques testigos con ocurrenicias en exceso y en defecto.

Ejemplo. Tomemos $k = 2$, $B_1 = (1\ 1)$ y $B_2 = (0\,0)$, bloques que cumplen las condiciones pedidas en la observación anterior. Veamos que B_1 tiene ocurrenicas en exceso y B_2 en defecto.
En primer lugar, ya sabemos que B_1 tiene ocurrencias a caballo y B_2 no, por ser el bloque de todos ceros. Analicemos, en segundo lugar, las ocurrencias no a caballo de cada bloque. Para eso, hagamos un conteo riguroso de las ocurrencias no a caballo de B_1 y B_2 en $(1\ldots 999) = (s_1\ s_2\ s_3)$, es decir, queremos caluclar para $i = 1, 2$,

$$\sum_{\ell=1}^{3} U_{nc}(B_i, \ell).$$

(Contamos hasta $\ell = 3$, pero el procedemiento es análogo para todo ℓ).
Caso B_1:

- $U_{nc}(B_1, 1) = 0$, es decir, la cantidad de ocurrencias no a caballo de B_1 en s_1 es cero, porque $k > 1$.
- $U_{nc}(B_1, 2) = 1$, porque la única ocurrencia de B_1 en s_2 es $(1\ 1)$.
- $U_{nc}(B_1, 3) = 19$ porque hay diez ocurrencias de la forma $(1\ 1\ \ *)$ y nueve de la forma $(*\ \ 1\ 1)$.

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{3} U_{nc}(B_1, \ell) = 20.$$

Caso B_2:

- $U_{nc}(B_1, 1) = 0$, porque $k > 1$.
- $U_{nc}(B_1, 2) = 0$, porque el término $(0\,0)$ no aparece en la escritura de la expansión de Champernowne.
- $U_{nc}(B_1, 3) = 9$ porque hay nueve ocurrencias de la forma $(*\ \ 0\,0)$, pero ninguna de la forma $(0\,0\ \ *)$.

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{3} U_{nc}(B_1, \ell) = 9.$$

Observación. El enunciado del Teorema 2 pide que la cota valga para infinitos N, debido a que es la negación de ser $o(1/\log N)$, y esa negación no requiere cofinitos. Pero, se puede observar que en la demostración lo probamos para cofinitos N (en particular, lo único que pedimos a lo largo de la demostración fue $n \geq k$), como lo hace Schiffer, obteniendo un resultado más fuerte. Esta fortaleza no está cuantificada en términos de discrepancia (la teoria clásica de discrepancia no tiene una definición para esto).

Notemos además que la prueba para infitos N es más fácil: podemos siempre agarrar N conveniente para que el conteo termine justo en un término de la forma $999\ldots 9$.

Referencias

[1] Y. Bugeaud. *Distribution modulo one and Diophantine approximation*, volume 193 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[2] D. G. Champernowne. The construction of decimals normal in the scale of ten. *Journal of the London Mathematical Society*, 8:254–260, 1933.

[3] D.D.Wall. *Normal numbers*. PhD thesis, University of California Berkeley, 1949. Ph.D.Thesis.

[4] K. Fukuyama. The law of the iterated logarithm for discrepancies of $\{\theta \text{ nx}\}$. *Acta Mathematica Hungarica*, 118:155–170, 2008.

[5] I. Gál and L. Gál. The discrepancy of the sequence $(2^n x)$. *Indagationes Mathematicae*, 26:129–143, 1964.

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford, at the Clarendon Press,, 1954. 3rd ed.

[7] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974.

[8] W. Moran and C.E.M. Pearce. Discrepancy results for normal numbers. *Miniconferences on harmonic analysis and operator algebras, Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications*, 16:203–210, 1988.

[9] Y. Nakai and I. Shiokawa. Discrepancy estimates for a class of normal numbers. *Acta Arithmetica*, 62(3):271–284, 1992.

[10] W. Philipp. Limit theorems for lacunary series and uniform distribution mod 1. *Acta Arithmetica*, 26(3):241–251, 1975.

[11] J. Schiffer. Discrepancy of normal numbers. *Acta Arithmetica*, 47(2):175–186, 1986.