Complexidade e algoritmos para algumas variações do problema de coloração

Flavia Bonomo   Guillermo Durán   Javier Marenco

Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina
Departamento de Ingeniería Industrial, FCFyM, Universidad de Chile, Chile
Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Seminário de grafos e algoritmos, COPPE, UFRJ, 2006

Esquema

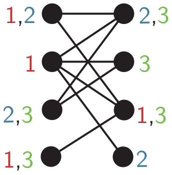
O problema da k-coloração

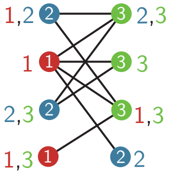
- Uma coloração de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \to \mathbb{N}$ tal que $f(v) \neq f(w)$ quando $vw \in E$.
- Uma k-coloração é uma coloração f tal que $f(v) \leq k$ para todo $v \in V$.
- O problema da coloração tem como entrada um grafo G e um número natural k, e consiste em decidir se G é k-colorível.

O problema da coloração por listas

As vezes, a k-coloração não é a forma mais natural de modelar as restrições que surgem dos problemas reais. Daí surgem algumas generalizações do problema da coloração, como a coloração por listas, que considera uma lista específica de cores disponíveis para cada vértice.

- Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma lista finita $L(v) \subseteq \mathbb{N}$ para cada vértice $v \in V$, o problema da coloração por listas consiste em decidir se o grafo G admite uma coloração f tal que $f(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$.





O problema da coloração por listas

- O problema da k-coloração pode-se resolver em tempo polinomial em varias classes de grafos, sendo a mais famosa delas a classe dos grafos perfeitos [Grötschel-Lovász-Schrijver, 1981].
- Mas o problema da coloração por listas é NP-completo para grafos perfeitos e varias subclasses deles, ainda classes tão restritas como os grafos split completos, bipartidos completos e grafos de intervalos.
- Duas classes para as quais se conhecem algoritmos polinomiais para coloração por listas são árvores e grafos completos. Para as árvores, o problema pode ser resolvido em tempo linear com um algoritmo simples [Jansen-Scheffler, 1997]. Para grafos completos, o problema pode ser reduzido a achar um matching de máxima cardinalidade em um grafo bipartido.

Nós estamos trabalhando em problemas que ficam “no meio” desses dois, tanto em termos de generalizações como em termos de complexidade computacional.

O problema da extensão de uma coloração

Alguns casos particulares do problema de coloração por listas já foram estudados.

- O problema da extensão de uma pré-coloração (PrExt) tem como entrada um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto $W \subseteq V$, uma coloração f' de W, e um número natural k, e consiste em decidir se G admite uma k-coloração f tal que $f(v) = f'(v)$ para todo $v \in W$ [Biro-Hujter-Tuza, 1992].

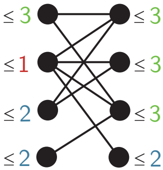
Isto é, o problema é estender uma coloração parcial a uma k-coloração completa do grafo.

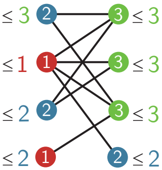
O problema da μ-coloração

Um outro caso particular do problema de coloração por listas é o seguinte:

- Dado um grafo G e uma função $\mu : V \to \mathbb{N}$, G é μ-colorível se existe uma coloração f de G tal que $f(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V$ [B.-Cecowski, 2005].

Esta variação surge no contexto de distribuição de salas para aulas, onde uma sala pode ser assinada a um curso se há a capacidade suficiente para todos os alunos que vão fazer o curso.





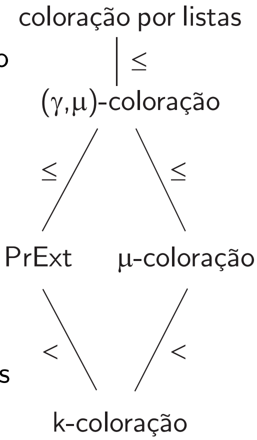
O problema da (γ, μ)-coloração

Neste último trabalho, definimos mais uma variação deste problema.

- Dado um grafo G e funções $\gamma, \mu : V \to \mathbb{N}$ tais que $\gamma(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V$, dizemos que G é (γ, μ)-colorível se existe uma coloração f de G tal que $\gamma(v) \leq f(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V$.

Hierarquia de problemas de coloração

- O problema clássico de coloração é claramente um caso particular de μ-coloração e extensão de uma coloração, os quais são casos particulares de (γ, μ)-coloração.
- Além disso, a (γ, μ)-coloração é um caso particular de coloração por listas.
- Estas observações implicam que todos os problemas nesta hierarquia são polinomiais nas classes de grafos onde coloração por listas é polinomial, e são todos NP-completos nas classes de grafos onde *k*-coloração é NP-completo.



Neste trabalho, estamos interessados na complexidade computacional destes problemas em subclasses de grafos perfeitos (onde k-coloração é polinomial) nas quais coloração por listas é NP-completo ou de complexidade desconhecida.

Grafos de intervalos

- Um grafo é de intervalos se é o grafo intersecção de uma família de intervalos na reta real. Um grafo é de intervalos unitários se é o grafo intersecção de uma família de intervalos de comprimento 1.
- A k-coloração de grafos de intervalos e intervalos unitários é polinomial. Entanto, estender uma pré-coloração em grafos de intervalos unitários é NP-completo [Marx, 2004], implicando que (γ, μ)-coloração e coloração por listas são NP-completos nesta classe e em grafos de intervalos.

Grafos split

- Um grafo split é um grafo tal que o seu conjunto de vértices pode-se partir em um completo K e um conjunto estável S. Um grafo split se diz completo se contém todas as arestas entre K e S.

- Colorir um grafo split é trivial, e o problema de extensão de uma pré-coloração também pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos split [Hujter-Tuza, 1996], mas o problema de coloração por listas é NP-completo ainda em grafos split completos [Jansen-Scheffler, 1997].

Grafos bipartidos

- Um grafo bipartido é um grafo tal que o seu conjunto de vértices pode-se partir em dois conjuntos estáveis V_1 e V_2. Um grafo bipartido se diz completo se contém todas as arestas entre V_1 e V_2.
- Também neste caso o problema da coloração é trivial, mas os problemas de extensão de uma pré-coloração [Hujter-Tuza, 1993] e μ-coloração [B.-Cecowski, 2005] são NP-completos em grafos bipartidos, implicando que (γ, μ)-coloração também é NP-completo para esta classe.
- Além disso, o problema da coloração por listas é NP-completo ainda em grafos bipartidos completos [Jansen-Scheffler, 1997].

Complementos de grafos bipartidos e cografos

- Para complementos de grafos bipartidos, a extensão de uma pré-coloração é polinomial [Hujter-Tuza, 1996], mas coloração por listas é NP-completo [Jansen, 1997].
- A mesma situação se dá para cografos, grafos que não têm um P_4 induzido [Hujter-Tuza, Jansen-Scheffler, 1996]. Para esta classe de grafos, a μ-coloração é polinomial [B.-Cecowski, 2005].
- Uma superclasse conhecida dos cografos são os grafos distância-hereditários. Um grafo G é distância-hereditário se para todo par de vértices v, w, a distância entre v e w é a mesma em todo subgrafo induzido conexo de G.

Grafos de linha

- O grafo de linha de um grafo é o grafo intersecção das arestas do mesmo. O problema da coloração de arestas (equivalente ao problema da k-coloração no grafo de linha) é NP-completo em geral [Holyer, 1981], mas ele pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos completos e grafos bipartidos [König, 1916].
- São resultados conhecidos que extensão de uma pré-coloração é NP-completo em grafos de linha de grafos bipartidos completos $K_{n,n}$ [Colbourn, 1984], e coloração por listas é NP-completo para grafos de linha de grafos completos [Kubale, 1992].

Resumo dos resultados conhecidos

Classe	k-col.	PrExt	μ-col.	(γ, μ)-col.	col. $\times$ listas
Bipartidos completos	P	P	**?**	**?**	NP-c
Bipartidos	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Cografos	P	P	P	?	NP-c
Distância-hereditários	P	**?**	**?**	**?**	NP-c
Intervalos	P	NP-c	**?**	NP-c	NP-c
Intervalos unitários	P	NP-c	?	NP-c	NP-c
Split completos	P	P	**?**	**?**	NP-c
Split	P	P	**?**	**?**	NP-c
Linha de $K_{n,n}$	P	NP-c	**?**	NP-c	NP-c
Linha de K_n	P	**?**	**?**	**?**	NP-c
Complementos de bipartidos	P	P	?	?	NP-c

"NP-c": problema NP-completo, "P": problema polinomial, "?": problema aberto.

Grafos de intervalos

Teorema

O problema da μ-coloração é NP-completo em grafos de intervalos.

Este resultado implica que (γ, μ)-coloração também é NP-completo em grafos de intervalos.

A prova está baseada na NP-completude do problema da *k*-coloração em grafos arco-circulares [Garey-Johnson-Miller-Papadimitriou, 1980].

Grafos bipartidos e split completos

Teorema

O problema da (γ, μ)-coloração é polinomial em grafos bipartidos completos e split completos.

O algoritmo para grafos bipartidos completos é puramente combinatório, e aquele para grafos split completos usa técnicas de programação linear.

Este teorema implica que μ-coloração e extensão da pré-coloração podem ser resolvidos em tempo polinomial para grafos bipartidos completos e split completos.

Grafos split

Teorema

O problema da μ-coloração é NP-completo em grafos split.

A prova deste resultado está baseada na NP-completude de achar um conjunto dominante mínimo em grafos split [Bertossi, Corneil-Perl, 1984].

Até agora, esta é a única classe conhecida na qual as complexidades computacionais de μ-coloração e extensão de uma pré-coloração são diferentes, se não acontecer que P $=$ NP.

Grafos de linha

Considerando estas variações do problema de coloração aplicadas a coloração de arestas, temos os seguintes resultados:

Teorema

O problema da μ-coloração é NP-completo em grafos de linha de grafos completos e bipartidos completos.

Teorema

O problema da extensão de uma pré-coloração é NP-completo em grafos de linha de grafos completos.

Todas estas provas estão baseadas na NP-completude da extensão de uma pré-coloração em grafos de linha de grafos bipartidos completos.

Grafos de blocos

Um grafo é um grafo de blocos se é conexo e todo bloco (componente 2-conexa maximal) é um completo.

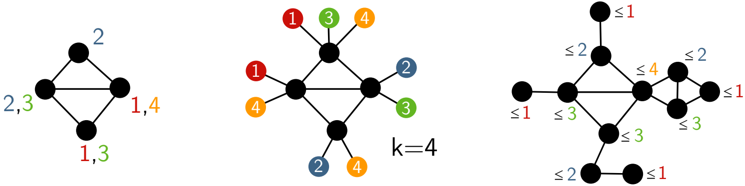
Teorema

O problema da coloração por listas é polinomial para grafos de blocos.

O algoritmo para esta classe de grafos é simples, e combina as idéias utilizadas para resolver o problema da coloração por listas em duas subclasses de grafos de blocos: árvores e grafos completos.

Resultados gerais

Como todos os problemas são NP-completos no caso geral, existem reduções polinomiais do problema da coloração por listas aos problemas da extensão de uma pré-coloração e μ-coloração. Pode-se ver na figura um exemplo onde há uma instância de coloração por listas e as instâncias correspondentes de extensão de uma coloração e μ-coloração.



Estas reduções envolvem mudanças no grafo, mas são fechadas dentro de algumas classes de grafos. Isto nos permite provar os resultados gerais seguintes:

Resultados gerais

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos com grau mínimo de pelo menos dois. Então coloração por listas, (γ, μ)-coloração e extensão de uma pré-coloração são polinomialmente equivalentes na classe de grafos $\mathcal{F}$-free.

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos que satisfaz a propriedade seguinte: para todo grafo G em $\mathcal{F}$, G não tem uma componente conexa completa, e para cada ponto de corte v de G, $G \backslash v$ não tem uma componente conexa completa. Então coloração por listas, (γ, μ)-coloração, extensão de uma pré-coloração e μ-coloração são polinomialmente equivalentes na classe de grafos $\mathcal{F}$-free.

Como os buracos e antiburacos ímpares verificam as condições dos teoremas anteriores, esses teoremas são aplicáveis a várias subclasses dos grafos perfeitos.

Grafos distância-hereditários

Teorema

Os problemas de (γ, μ)-coloração, extensão de uma pré-coloração e μ-coloração são NP-completos em grafos distância-hereditários.

Os grafos distância-hereditários são equivalentes aos $\{$house, domino, gem, $\{C_n\}_{n\geq 5}\}$-free. Então este resultado é um corolário direto do teorema geral anterior e a NP-completude de coloração por listas em cografos.

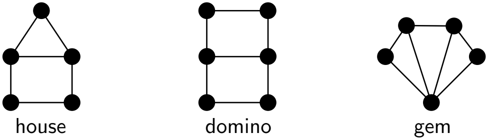


Tabela de complexidade para problemas de coloração

Classe	k-col.	PrExt	μ-col.	(γ, μ)-col.	col. $\times$ listas
Bipartidos completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Bipartidos	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Cografos	P	P	P	?	NP-c
Distância-hereditários	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Intervalos	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Intervalos unitários	P	NP-c	?	NP-c	NP-c
Split completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Split	P	P	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Linha de $K_{n,n}$	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Linha de K_n	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Complementos de bipartidos	P	P	?	?	NP-c
Grafos de blocos	P	**P**	**P**	**P**	**P**

"NP-c": problema NP-completo, "P": problema polinomial, "?": problema aberto.

Tabela de complexidade para problemas de coloração

Classe	k-col.	PrExt	μ-col.	(γ, μ)-col.	col. $\times$ listas
Bipartidos completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Bipartidos	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Cografos	P	P	P	?	NP-c
Distância-hereditários	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Intervalos	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Intervalos unitários	P	NP-c	?	NP-c	NP-c
Split completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Split	P	P	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Linha de $K_{n,n}$	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Linha de K_n	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Complementos de bipartidos	P	P	?	?	NP-c
Grafos de blocos	P	**P**	**P**	**P**	**P**

"NP-c": problema NP-completo, "P": problema polinomial, "?": problema aberto.

Como pode-se ver na tabela, se P $\neq$ NP, μ-coloração e extensão de uma pré-coloração são estritamente mais difíceis que k-coloração. Coloração por listas é estritamente mais difícil que (γ, μ)-coloração, a qual é estritamente mais difícil que extensão de uma pré-coloração.

Tabela de complexidade para problemas de coloração

Classe	k-col.	PrExt	μ-col.	(γ, μ)-col.	col. $\times$ listas
Bipartidos completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Bipartidos	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Cografos	P	P	P	?	NP-c
Distância-hereditários	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Intervalos	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Intervalos unitários	P	NP-c	?	NP-c	NP-c
Split completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Split	P	P	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Linha de $K_{n,n}$	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Linha de K_n	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Complementos de bipartidos	P	P	?	?	NP-c
Grafos de blocos	P	**P**	**P**	**P**	**P**

"NP-c": problema NP-completo, "P": problema polinomial, "?": problema aberto.

Fica como problema aberto achar uma classe de grafos tal que (γ, μ)-coloração seja NP-completo e μ-coloração seja polinomial. Entre as classes consideradas neste trabalho, as candidatas são cografos, intervalos unitários e complementos de bipartidos.

Tabela de complexidade para problemas de coloração

Classe	k-col.	PrExt	μ-col.	(γ, μ)-col.	col. $\times$ listas
Bipartidos completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Bipartidos	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Cografos	P	P	P	?	NP-c
Distância-hereditários	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Intervalos	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Intervalos unitários	P	NP-c	?	NP-c	NP-c
Split completos	P	P	**P**	**P**	NP-c
Split	P	P	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Linha de $K_{n,n}$	P	NP-c	**NP-c**	NP-c	NP-c
Linha de K_n	P	**NP-c**	**NP-c**	**NP-c**	NP-c
Complementos de bipartidos	P	P	?	?	NP-c
Grafos de blocos	P	**P**	**P**	**P**	**P**

"NP-c": problema NP-completo, "P": problema polinomial, "?": problema aberto.

Para grafos split, extensão de uma pré-coloração é polinomial, mas μ-coloração é NP-completo. Fica como problema aberto achar uma classe de grafos onde aconteça o contrário. Entre as classes consideradas neste trabalho, a classe candidata é intervalos unitários.

Hierarquia de problemas de coloração