Grafos self-clique arco-circulares Helly

Flavia Bonomo

Departamento de Matemática, FCEyN, UBA

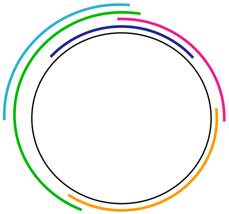
SIO 2005, Rosario

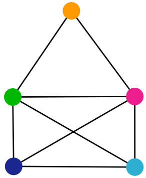
Grafos intersección

- Dado un conjunto de elementos A y una familia $\mathcal{F}$ finita de subconjuntos de A, el grafo intersección de $\mathcal{F}$ tiene un vértice por cada elemento de $\mathcal{F}$ y dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes tienen intersección no vacía.
- Un grafo es arco-circular si es el grafo intersección de alguna familia finita de arcos de una circunferencia (la familia de arcos se llama modelo de arcos del grafo).
  Ejemplo:

Grafos intersección

- Dado un conjunto de elementos A y una familia $\mathcal{F}$ finita de subconjuntos de A, el grafo intersección de $\mathcal{F}$ tiene un vértice por cada elemento de $\mathcal{F}$ y dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes tienen intersección no vacía.
- Un grafo es arco-circular si es el grafo intersección de alguna familia finita de arcos de una circunferencia (la familia de arcos se llama modelo de arcos del grafo).
  Ejemplo:





Grafos intersección

- Una clique en un grafo es un conjunto maximal de vértices adyacentes dos a dos.
- El grafo clique $K(G)$ de un grafo G es el grafo intersección de las cliques de G.

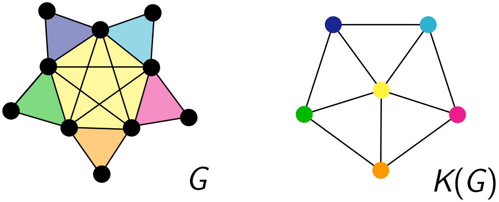
  Ejemplo:

- Si $t \geq 1$, $K^t(G)$ es el grafo obtenido a partir de G aplicando t veces el operador clique.

Grafos intersección

- Una clique en un grafo es un conjunto maximal de vértices adyacentes dos a dos.
- El grafo clique $K(G)$ de un grafo G es el grafo intersección de las cliques de G.

Ejemplo:

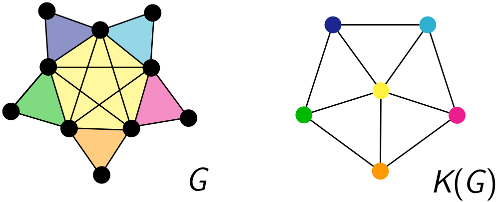


- Si $t \geq 1$, $K^t(G)$ es el grafo obtenido a partir de G aplicando t veces el operador clique.

Grafos intersección

- Una clique en un grafo es un conjunto maximal de vértices adyacentes dos a dos.
- El grafo clique $K(G)$ de un grafo G es el grafo intersección de las cliques de G.

Ejemplo:



- Si $t \geq 1$, $K^t(G)$ es el grafo obtenido a partir de G aplicando t veces el operador clique.

Propiedad de Helly

- Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos verifica la propiedad de Helly si toda subfamilia de $\mathcal{F}$ tal que sus elementos se intersecan dos a dos, tiene intersección no vacía.
- Un grafo es clique-Helly si sus cliques verifican la propiedad de Helly.
- Un grafo es arco-circular Helly (HCA) si tiene un modelo de arcos que verifica la propiedad de Helly.

Ejemplos:

Propiedad de Helly

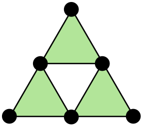
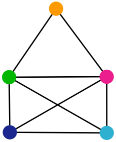
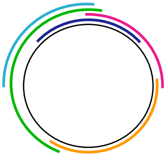
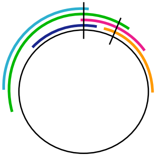
- Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos verifica la propiedad de Helly si toda subfamilia de $\mathcal{F}$ tal que sus elementos se intersecan dos a dos, tiene intersección no vacía.
- Un grafo es clique-Helly si sus cliques verifican la propiedad de Helly.
- Un grafo es arco-circular Helly (HCA) si tiene un modelo de arcos que verifica la propiedad de Helly.

Ejemplos:

Propiedad de Helly

- Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos verifica la propiedad de Helly si toda subfamilia de $\mathcal{F}$ tal que sus elementos se intersecan dos a dos, tiene intersección no vacía.
- Un grafo es clique-Helly si sus cliques verifican la propiedad de Helly.
- Un grafo es arco-circular Helly (HCA) si tiene un modelo de arcos que verifica la propiedad de Helly.

Ejemplos:

Matriz clique

- La matriz clique A_G de un grafo G tiene una fila por cada clique de G y una columna por cada vértice de G. $A_G(i,j) = 1$ si el vértice j pertenece a la clique i y 0 sino.
- Una matriz es quasi-simétrica si el conjunto de vectores correspondiente a sus filas coincide con el correspondiente a las columnas. Una matriz simétrica es quasi-simétrica.
- Un grafo G tiene una matriz clique simétrica si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que $i \in M_j \Leftrightarrow j \in M_i$.

Matriz clique

- La matriz clique A_G de un grafo G tiene una fila por cada clique de G y una columna por cada vértice de G. $A_G(i,j) = 1$ si el vértice j pertenece a la clique i y 0 sino.
- Una matriz es quasi-simétrica si el conjunto de vectores correspondiente a sus filas coincide con el correspondiente a las columnas. Una matriz simétrica es quasi-simétrica.
- Un grafo G tiene una matriz clique simétrica si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que $i \in M_j \Leftrightarrow j \in M_i$.

Matriz clique

- La matriz clique A_G de un grafo G tiene una fila por cada clique de G y una columna por cada vértice de G. $A_G(i,j) = 1$ si el vértice j pertenece a la clique i y 0 sino.
- Una matriz es quasi-simétrica si el conjunto de vectores correspondiente a sus filas coincide con el correspondiente a las columnas. Una matriz simétrica es quasi-simétrica.
- Un grafo G tiene una matriz clique simétrica si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que $i \in M_j \Leftrightarrow j \in M_i$.

Isomorfismo de grafos

- Dos grafos G y H son isomorfos ($G \cong H$) si existe una función biyectiva $f : V(G) \to V(H)$ tal que v y w son adyacentes en G si y sólo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en H.
- Un grafo es self-clique si es isomorfo a su grafo clique, o sea, si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que i es adyacente a j sii $M_i \cap M_j \neq \emptyset$.

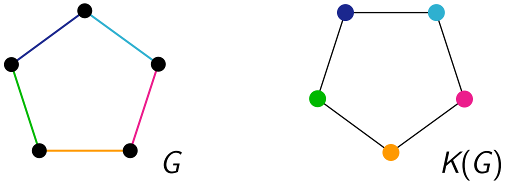
  Ejemplo:

- En general, si $t \geq 1$, un grafo G es t-self-clique si $G \cong K^t(G)$.

Isomorfismo de grafos

- Dos grafos G y H son isomorfos ($G \cong H$) si existe una función biyectiva $f : V(G) \to V(H)$ tal que v y w son adyacentes en G si y sólo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en H.
- Un grafo es self-clique si es isomorfo a su grafo clique, o sea, si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que i es adyacente a j sii $M_i \cap M_j \neq \emptyset$.

Ejemplo:

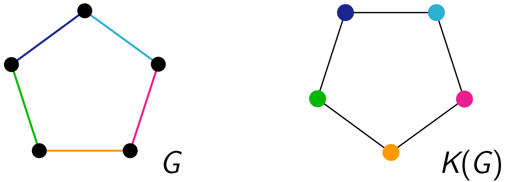


- En general, si $t \geq 1$, un grafo G es t-self-clique si $G \cong K^t(G)$.

Isomorfismo de grafos

- Dos grafos G y H son isomorfos ($G \cong H$) si existe una función biyectiva $f : V(G) \to V(H)$ tal que v y w son adyacentes en G si y sólo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en H.
- Un grafo es self-clique si es isomorfo a su grafo clique, o sea, si existe una función biyectiva de los vértices en las cliques, $i \mapsto M_i$, tal que i es adyacente a j sii $M_i \cap M_j \neq \emptyset$.

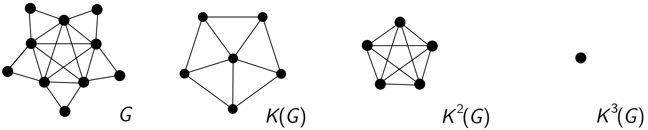
  Ejemplo:



- En general, si $t \geq 1$, un grafo G es t-self-clique si $G \cong K^t(G)$.

Operador clique iterado

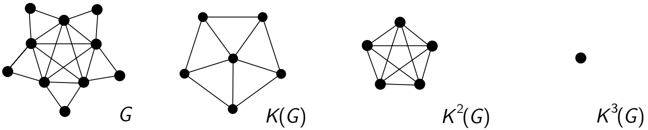
- Un grafo es clique-convergente si existe $t \geq 1$ tal que $|V(K^t(G))| = 1$.



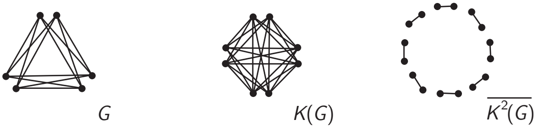
- Un grafo es clique-divergente si $|V(K^t(G))| \longrightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Operador clique iterado

- Un grafo es clique-convergente si existe $t \geq 1$ tal que $|V(K^t(G))| = 1$.



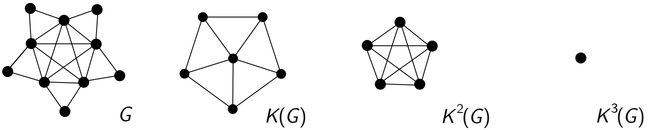
- Un grafo es clique-divergente si $|V(K^t(G))| \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$.



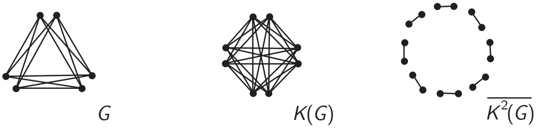
- Ninguno de los anteriores: entonces existen j y t tal $K^j(G)$ es t-self-clique.

Operador clique iterado

- Un grafo es clique-convergente si existe $t \geq 1$ tal que $|V(K^t(G))| = 1$.



- Un grafo es clique-divergente si $|V(K^t(G))| \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$.



- Ninguno de los anteriores: entonces existen j y t tal $K^j(G)$ es t-self-clique.

Grafos self-clique

- La complejidad computacional de decidir si un grafo es self-clique está abierta, es polinomialmente reducible al problema de isomorfismo en grafos, ya que basta calcular las primeras n cliques (si son mas de n seguro no es), que es polinomial, y en el caso en que G tenga n cliques, basta con chequear si G es isomorfo a $K(G)$.
- Para el caso particular de los grafos arco-circulares Helly, el problema de reconocer si un grafo es self-clique es polinomial, ya que isomorfismo en HCA es polinomial (Hsu, 1995).
- Para grafos clique-Helly hereditarios, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en grafos (Larrión, Neumann-Lara, Pizaña y Porter, 2003).
- Para grafos clique-Helly, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en hipergrafos (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).

Grafos self-clique

- La complejidad computacional de decidir si un grafo es self-clique está abierta, es polinomialmente reducible al problema de isomorfismo en grafos, ya que basta calcular las primeras n cliques (si son mas de n seguro no es), que es polinomial, y en el caso en que G tenga n cliques, basta con chequear si G es isomorfo a $K(G)$.
- Para el caso particular de los grafos arco-circulares Helly, el problema de reconocer si un grafo es self-clique es polinomial, ya que isomorfismo en HCA es polinomial (Hsu, 1995).
- Para grafos clique-Helly hereditarios, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en grafos (Larrión, Neumann-Lara, Pizaña y Porter, 2003).
- Para grafos clique-Helly, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en hipergrafos (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).

Grafos self-clique

- La complejidad computacional de decidir si un grafo es self-clique está abierta, es polinomialmente reducible al problema de isomorfismo en grafos, ya que basta calcular las primeras n cliques (si son mas de n seguro no es), que es polinomial, y en el caso en que G tenga n cliques, basta con chequear si G es isomorfo a $K(G)$.
- Para el caso particular de los grafos arco-circulares Helly, el problema de reconocer si un grafo es self-clique es polinomial, ya que isomorfismo en HCA es polinomial (Hsu, 1995).
- Para grafos clique-Helly hereditarios, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en grafos (Larrión, Neumann-Lara, Pizaña y Porter, 2003).
- Para grafos clique-Helly, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en hipergrafos (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).

Grafos self-clique

- La complejidad computacional de decidir si un grafo es self-clique está abierta, es polinomialmente reducible al problema de isomorfismo en grafos, ya que basta calcular las primeras n cliques (si son mas de n seguro no es), que es polinomial, y en el caso en que G tenga n cliques, basta con chequear si G es isomorfo a $K(G)$.
- Para el caso particular de los grafos arco-circulares Helly, el problema de reconocer si un grafo es self-clique es polinomial, ya que isomorfismo en HCA es polinomial (Hsu, 1995).
- Para grafos clique-Helly hereditarios, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en grafos (Larrión, Neumann-Lara, Pizaña y Porter, 2003).
- Para grafos clique-Helly, es polinomialmente equivalente al problema de isomorfismo en hipergrafos (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).

Grafos self-clique clique-Helly

Teorema (Escalante, 1973)

Sea G un grafo clique-Helly. Entonces G es t-self-clique si y sólo si no tiene vértices mellizos ni dominados, y en ese caso, $t = 1$ o 2.

El teorema anterior no permite distinguir entre grafos self-clique y 2-self-clique.

Teorema (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003)

Un grafo es self-clique clique-Helly si y sólo tiene una matriz clique quasi-simétrica.

Grafos self-clique clique-Helly

Teorema (Escalante, 1973)

Sea G un grafo clique-Helly. Entonces G es t-self-clique si y sólo si no tiene vértices mellizos ni dominados, y en ese caso, $t = 1$ o 2.

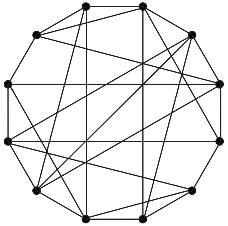
El teorema anterior no permite distinguir entre grafos self-clique y 2-self-clique.

Teorema (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003)

Un grafo es self-clique clique-Helly si y sólo tiene una matriz clique quasi-simétrica.

Grafos self-clique clique-Helly

No vale que todo grafo self-clique clique-Helly tiene una matriz clique simétrica. El grafo de la figura (Robak, 2003) tiene una matriz clique quasi-simétrica, y por lo tanto es self-clique clique-Helly, pero no admite una matriz clique simétrica.



Más aún, es mínimo con esa propiedad.

Otras caracterizaciones conocidas

- Como corolario del resultado de Escalante, se puede probar que si G un grafo conexo no trivial y sin triángulos, entonces G es self-clique si y sólo es un ciclo, y 2-self-clique si y sólo si no es un ciclo pero todo vértice tiene grado al menos 2.
- Chia (2000) extiende este resultado caracterizando los grafos self-clique cuyas cliques son todas de tamaño 2 excepto una.
- Larrión y Pizaña (2005) caracterizan los grafos self-clique clique-Helly hereditarios.
- Combinando resultados de Escalante (1973) y Szwarcfiter y Bornstein (1994), se puede probar que todo grafo cordal es clique-convergente, y en particular no hay grafos cordales self-clique no triviales.

Otras caracterizaciones conocidas

- Como corolario del resultado de Escalante, se puede probar que si G un grafo conexo no trivial y sin triángulos, entonces G es self-clique si y sólo es un ciclo, y 2-self-clique si y sólo si no es un ciclo pero todo vértice tiene grado al menos 2.
- Chia (2000) extiende este resultado caracterizando los grafos self-clique cuyas cliques son todas de tamaño 2 excepto una.
- Larrión y Pizaña (2005) caracterizan los grafos self-clique clique-Helly hereditarios.
- Combinando resultados de Escalante (1973) y Szwarcfiter y Bornstein (1994), se puede probar que todo grafo cordal es clique-convergente, y en particular no hay grafos cordales self-clique no triviales.

Otras caracterizaciones conocidas

- Como corolario del resultado de Escalante, se puede probar que si G un grafo conexo no trivial y sin triángulos, entonces G es self-clique si y sólo es un ciclo, y 2-self-clique si y sólo si no es un ciclo pero todo vértice tiene grado al menos 2.
- Chia (2000) extiende este resultado caracterizando los grafos self-clique cuyas cliques son todas de tamaño 2 excepto una.
- Larrión y Pizaña (2005) caracterizan los grafos self-clique clique-Helly hereditarios.
- Combinando resultados de Escalante (1973) y Szwarcfiter y Bornstein (1994), se puede probar que todo grafo cordal es clique-convergente, y en particular no hay grafos cordales self-clique no triviales.

Otras caracterizaciones conocidas

- Como corolario del resultado de Escalante, se puede probar que si G un grafo conexo no trivial y sin triángulos, entonces G es self-clique si y sólo es un ciclo, y 2-self-clique si y sólo si no es un ciclo pero todo vértice tiene grado al menos 2.
- Chia (2000) extiende este resultado caracterizando los grafos self-clique cuyas cliques son todas de tamaño 2 excepto una.
- Larrión y Pizaña (2005) caracterizan los grafos self-clique clique-Helly hereditarios.
- Combinando resultados de Escalante (1973) y Szwarcfiter y Bornstein (1994), se puede probar que todo grafo cordal es clique-convergente, y en particular no hay grafos cordales self-clique no triviales.

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$

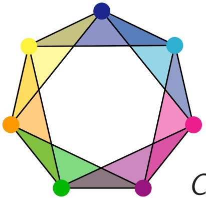
- Dado un grafo G, el grafo G^k tiene el mismo conjunto de vértices de G, y dos vértices son adyacentes en G^k si están a distancia $\leq k$ en G.
- Si G es un grafo tal que todo vértice tiene grado al menos 2 y todo ciclo tiene longitud al menos $6s+1$, entonces G^{2s} es self-clique clique-Helly (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).
- En particular, C_n^k es self-clique clique-Helly para k par y $n \geq 3k+1$. Más aún, tiene una matriz clique simétrica que se obtiene con la siguiente asignación de cliques a vértices:

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$

- Dado un grafo G, el grafo G^k tiene el mismo conjunto de vértices de G, y dos vértices son adyacentes en G^k si están a distancia $\leq k$ en G.
- Si G es un grafo tal que todo vértice tiene grado al menos 2 y todo ciclo tiene longitud al menos $6s+1$, entonces G^{2s} es self-clique clique-Helly (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).
- En particular, C_n^k es self-clique clique-Helly para k par y $n \geq 3k+1$. Más aún, tiene una matriz clique simétrica que se obtiene con la siguiente asignación de cliques a vértices:

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$

- Dado un grafo G, el grafo G^k tiene el mismo conjunto de vértices de G, y dos vértices son adyacentes en G^k si están a distancia $\leq k$ en G.
- Si G es un grafo tal que todo vértice tiene grado al menos 2 y todo ciclo tiene longitud al menos $6s+1$, entonces G^{2s} es self-clique clique-Helly (Bondy, Durán, Lin, Szwarcfiter, 2003).
- En particular, C_n^k es self-clique clique-Helly para k par y $n \geq 3k+1$. Más aún, tiene una matriz clique simétrica que se obtiene con la siguiente asignación de cliques a vértices:

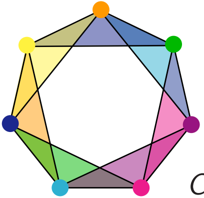


C_7^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$

Lo mismo vale para todo k tal que $n \geq 3k+1$, aunque con una asignación de cliques a vértices diferente:

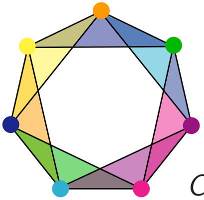


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$, son clique-Helly y self-clique.

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$

Lo mismo vale para todo k tal que $n \geq 3k+1$, aunque con una asignación de cliques a vértices diferente:



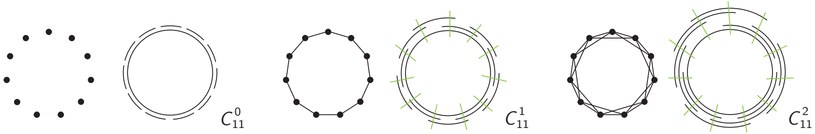
C_7^2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los grafos C_n^k, con $n \geq 3k+1$, son clique-Helly y self-clique.

Grafos C_n^k, con $n \geq 3k + 1$

Además, se puede ver que son arco-circulares Helly.



Caracterización

El resultado principal de este trabajo es que son los únicos self-clique (y más aún, t-self-clique) dentro de la clase HCA.

Teorema

Sea G un grafo arco-circular Helly de n vértices. Entonces, son equivalentes:

1. G es t-self-clique para algún $t \geq 1$
2. G es self-clique
3. G es isomorfo a C_n^k para algún $k \geq 0$ tal que $3k + 1 \leq n$.

Por último, se puede probar que todo grafo *HCA* es clique-convergente o “converge” en t pasos a algún C_r^k, para alguna tripla de valores t, k y r, con $t, k \geq 0$ y $3k + 1 \leq r$.

Caracterización

El resultado principal de este trabajo es que son los únicos self-clique (y más aún, t-self-clique) dentro de la clase HCA.

Teorema

Sea G un grafo arco-circular Helly de n vértices. Entonces, son equivalentes:

1. G es t-self-clique para algún $t \geq 1$
2. G es self-clique
3. G es isomorfo a C_n^k para algún $k \geq 0$ tal que $3k + 1 \leq n$.

Por último, se puede probar que todo grafo *HCA* es clique-convergente o "converge" en t pasos a algún C_r^k, para alguna tripla de valores t, k y r, con $t, k \geq 0$ y $3k + 1 \leq r$.