



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Caracterización estructural de los árboles de thinness propia 2

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Ignacio Maqueda

Directora: Flavia Bonomo

Mentora beca BIICC: Nina Pardal

Buenos Aires, 2023

Abstract

The proper thinness of a graph is an invariant that generalizes the concept of a proper interval graph. Every graph has a numerical value of proper thinness and the graphs with proper thinness 1 are exactly the proper interval graphs.

A graph is proper k -thin if its vertices can be ordered in such a way that there is a partition of the vertices into k classes satisfying that for each triple of vertices $r < s < t$, such that there is an edge between r and t , it is true that if r and s belong to the same class, then there is an edge between s and t , and if s and t belong to the same class, then there is an edge between r and s . The proper thinness is the smallest value of k such that the graph is proper k -thin.

In this work we focus on the calculation of proper thinness for trees. We characterize trees of proper thinness 2, both structurally and by their minimal forbidden induced subgraphs.

We also show why the results obtained for trees of proper thinness 2 cannot be generalized to trees of proper thinness 3.

Keywords: trees, proper thinness, characterizations

Resumen

La thinness propia de un grafo es un invariante que generaliza a los grafos de intervalos propios. Todo grafo tiene un valor numérico de thinness propia y los grafos con thinness propia 1 coinciden con los grafos de intervalos propios.

Un grafo es k -thin propio si sus vértices pueden ordenarse de manera que exista una partición de los vértices en k clases cumpliendo que para cada tripla de vértices $r < s < t$, tales que existe una arista entre r y t , se cumplen que si r y s pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre s y t , y si s y t pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre r y s . La thinness propia de un grafo es el menor valor de k tal que el grafo sea k -thin propio.

En este trabajo nos enfocamos en el cálculo de la thinness propia para los árboles. Caracterizamos los árboles de thinness propia 2, tanto estructuralmente como por sus subgrafos inducidos minimales prohibidos.

También mostramos por qué los resultados obtenidos para árboles de thinness propia 2 no pueden ser generalizados a árboles de thinness propia 3.

Palabras clave: árboles, thinness propia, caracterizaciones

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Contexto previo	3
1.2. Definiciones y propiedades básicas	7
2. Caracterización de árboles de thinness propia 2	12
2.1. Árboles y bosques de intervalos e intervalos propios	12
2.2. Caracterización estructural	13
2.2.1. Resultados auxiliares	13
2.2.2. Teorema de caracterización estructural	23
2.3. Caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales	26
3. Intento de generalización a árboles de thinness propia 3	34
3.1. Resultados para generalizar	34
3.2. Contraejemplo	34
3.3. Resultados válidos para árboles de thinness propia 3	37
4. Conclusiones y trabajo futuro	39

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Contexto previo

Gran parte de los problemas de optimización definidos sobre grafos son computacionalmente difíciles. Para estos problemas, resulta natural preguntarse: *¿Para qué subclases de grafos el problema puede resolverse de forma eficiente y para cuáles es intrínsecamente difícil?*

Saber que una familia de grafos tiene un *ancho acotado* (por ejemplo, treewidth [36] o clique-width [24, 19]) demostró ser una propiedad sumamente útil para diseñar algoritmos eficientes, en general utilizando programación dinámica, para muchos problemas famosos, como el problema de coloreo de grafos o el de conjunto independiente máximo [20]. Más aún, en muchos casos se lograron resultados algorítmicos de aplicación muy general, conocidos como *metateoremas*. Un metateorema tiene la forma: *“si un problema puede ser expresado en tal lenguaje o con este tipo de restricciones: [tipo correspondiente], entonces puede ser resuelto en tiempo polinomial para grafos de [ancho correspondiente] acotado”*. Algunos ejemplos de esto pueden encontrarse en [4, 16, 17, 18].

Desde los años '80 varios parámetros de ancho en un grafo fueron definidos, con el objeto de abarcar clases de grafos dentro de las cuales problemas NP-completos en general resultaran polinomiales. Además de los ya mencionados, otros ejemplos de

parámetros clásicos son el *path-width* [35], el *bandwidth* [31, 23], y la *boxicity* [34]. Más recientemente se incorporaron la *thinness* [28], el *mim-width* y su versión lineal [39], el *sim-width* [26] y en 2020 el *twin-width* [5]. Recientemente se anunció un metateorema bastante potente para el *mim-width* [3].

La **thinness** fue definida por Mannino, Oriolo, Ricci y Chandran en 2007 en el marco de una aplicación a problemas provenientes de la telefonía celular vinculados con el problema de conjunto independiente [28]. La *thinness* de un grafo se define de la siguiente manera:

Definición 1. [28] *Un grafo $G = (V, E)$ es k -thin si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n y una partición V^1, \dots, V^k de V en k clases tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$, si v_r, v_s se encuentran en la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$.*

La *thinness* de un grafo G es el menor número k para el cual G es un grafo k -thin, y se denota como $\text{thin}(G)$. Cuando un ordenamiento y una partición verifican la definición de k -thin decimos que el ordenamiento y la partición son consistentes. Se puede ver un ejemplo en la Figura 1.1:

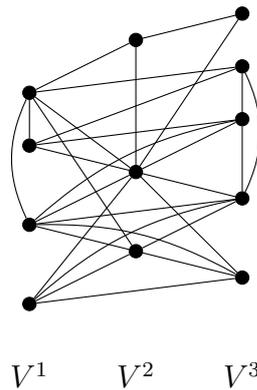


Figura 1.1: Una representación 3-thin de un grafo. Los vértices están ordenados de abajo hacia arriba y las clases corresponden a las líneas verticales.

La definición de *thinness* dio lugar a las variantes *propia* [6], *independiente o completa* [11], *de precedencia* [12], *mixta o mixta libre de inversión* (y sus versiones propias). Estas últimas variantes fueron definidas en 2022 por Balabán, Hlinený, y Jedelský [1], y muestran que el parámetro despertó interés en la comunidad en los últimos años. En particular, en [6] se obtuvo un resultado de tipo metateorema para la *thinness*, es decir, se describe una amplia familia de problemas que pueden resolverse en tiem-

po polinomial en grafos de thinness acotada. Además, allí se define el concepto de *thinness propia* y se extiende aún más la familia de problemas que pueden resolverse en tiempo polinomial en grafos de thinness propia acotada, incluyendo problemas de dominación.

Definición 2. [6] *Un grafo $G = (V, E)$ es k -thin propio si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n y una partición V^1, \dots, V^k de V en k clases tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$ se cumple que:*

- *Si v_r, v_s pertenecen a la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$*
- *Si v_s, v_t pertenecen a la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_r v_s \in E$*

La thinness propia de un grafo G es el menor número k para el cual el grafo cumple la definición de k -thin propio. Se denota como $\text{pthin}(G)$. Cuando un ordenamiento y una partición verifican la definición de k -thin propio decimos que el ordenamiento y la partición son *fuertemente consistentes*. Se puede ver un ejemplo en la Figura 1.2:

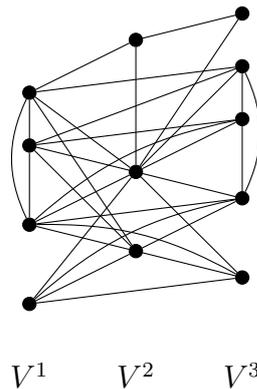


Figura 1.2: Una representación 3-thin propia de un grafo. Los vértices están ordenados de abajo hacia arriba y las clases corresponden a las líneas verticales.

Relaciones conocidas entre los parámetros más clásicos y entre algunas variantes de la thinness se muestran en la Figura 1.3. La relación entre la thinness y otros parámetros de ancho se obtiene combinando resultados de [6, 9, 28]. Otra relación demostrada recientemente es que los grafos k -thin mixtos propios tienen twin-width lineal en k [1], mientras que los grafos de intervalos (1-thin) tienen twin-width no acotado [5].

Con respecto al reconocimiento de la thinness y thinness propia, en [6, 7] se prueba que, dado un orden de los vértices, hay un algoritmo de orden cúbico que encuentra una partición (fuertemente) consistente en un número mínimo de clases. En cambio,

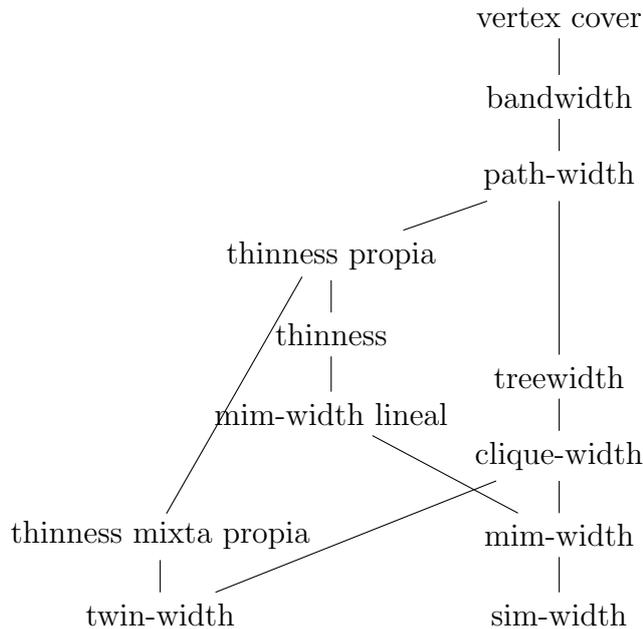


Figura 1.3: Diagrama de Hasse entre algunos de los parámetros de ancho a considerar. Si α precede β en el diagrama, entonces α está acotado superiormente por una función de β . Si no hay una relación de precedencia, los parámetros no son comparables, excepto en el caso de thinness mixta propia y treewidth, ya que no se ha probado aún que la thinness mixta propia no esté acotada superiormente por una función del treewidth (los árboles tienen thinness mixta propia a lo sumo 3 [2]).

fijada una partición de los vértices, es NP-completo decidir si existe un orden (fuertemente) consistente con esa partición [6]. En [38], reduciendo desde ese problema, se demuestra que decidir si un grafo es k -thin es NP-completo. Continúa abierta la complejidad para k fijo y para la variante propia.

Dado que el cómputo de la thinness es NP-hard en general, es válida la pregunta para clases restringidas de grafos. Se ha demostrado que calcular la thinness es polinomial para cografos [6] y para árboles [8, 14]. En ambos casos, la thinness puede ser arbitrariamente grande. Aún permanece abierta la complejidad de calcular la thinness propia en ambas clases.

El algoritmo para la thinness de árboles está inspirado en el algoritmo para el mim-width lineal de árboles [25], que a su vez se inspira en el algoritmo para el pathwidth de árboles [22, 37].

Es sabido [6, 28] que, en general,

$$\text{lmimw}(G) \leq \text{thin}(G) \leq \text{pw}(G) + 1.$$

Por otra parte, en [10, 15], se prueba que

$$\text{pthin}(G) \leq \text{bw}(G) + 1.$$

Sin embargo, no es posible inspirarse en este caso en algoritmos para el bandwidth, ya que el problema es NP-completo aún para ciertas subclases bastante restringidas de árboles [29] (los caterpillar de pelo largo y grado máximo 3). De hecho veremos que una de esas subclases de árboles está propiamente contenida en los árboles de thinness propia a lo sumo dos.

Desde un punto de vista estructural, un objetivo natural que surge es el de lograr una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos de la clases de grafos definidas por su thinness o thinness propia. También es válido estudiarlo en particular para algunas clases de grafos.

Una caracterización completa por subgrafos inducidos prohibidos se conoce para la thinness de cografos [6] y una caracterización estructural para la thinness de árboles [14]. En ambos casos, el problema para thinness propia permanece abierto.

En esta tesis, abordaremos el estudio de ambos problemas para la clase de los árboles. De las definiciones anteriores se deduce que, para cualquier grafo, es válida la desigualdad $\text{thin}(G) \leq \text{pthin}(G)$. Como sabemos por [6] que la clase de los árboles no tiene thinness acotada, entonces esta clase tampoco tiene thinness propia acotada.

Determinar la thinness propia de un grafo (en este caso, un árbol), y obtener un ordenamiento y una partición fuertemente consistentes es un problema útil debido a que si en un grafo la thinness propia es acotada, algunos problemas NP-Completo pueden resolverse en tiempo polinomial, dada la representación correspondiente [6].

1.2. Definiciones y propiedades básicas

Todos los grafos en esta tesis son finitos, no dirigidos y no tienen bucles ni aristas múltiples.

Sea G un grafo, denotamos como $V(G)$ al conjunto de sus vértices o nodos y como $E(G)$ al conjunto de sus aristas. Denotamos como $N(v)$ al vecindario de un vértice $v \in V$, esto es, el conjunto de vértices que son adyacentes a v . Denotamos como $N[v]$ al vecindario cerrado de un vértice $v \in V$, es decir, $N(v) \cup \{v\}$. Si $X \in V(G)$,

denotamos como $N(X)$ al conjunto de vértices que no están en X con al menos un vecino en X , y denotamos como $N[X]$ al vecindario cerrado $N(X) \cup X$.

Un grafo H es un *subgrafo* de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Dado un conjunto de vértices $W \subseteq V(G)$, el subgrafo de G *inducido* por W es el subgrafo H de G tal que $V(H) = W$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en W .

Denotamos como $G[W]$ al subgrafo de G inducido por un conjunto $W \subseteq V(G)$, y como $G - W$ al grafo $G[V(G) \setminus W]$.

Dos grafos G y H son *isomorfos* si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Si G_1 y G_2 son dos grafos, la unión disjunta de G_1 y G_2 , denotada por $G = G_1 \cup G_2$, es tal que $V(G) = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son disjuntos, $G[V_1]$ es isomorfo a G_1 y $G[V_2]$ es isomorfo a G_2 .

El *grado* de un vértice v en un grafo G es la cantidad de aristas que tienen a v como uno de sus extremos, y se denota por $d(v)$. Un *camino* es una lista ordenada de vértices en la que cada vértice, salvo el primero, es adyacente al anterior. Un *camino simple* es un camino en el que cada vértice aparece a lo sumo una vez.

Un *camino inducido* es un camino tal que no existen en el grafo aristas con ambos extremos en el camino y que no sean parte del mismo (ver ejemplo en Figura 1.4). Cuando decimos que un grafo *es un camino*, nos referimos a que todos los vértices del grafo forman parte de un camino inducido.

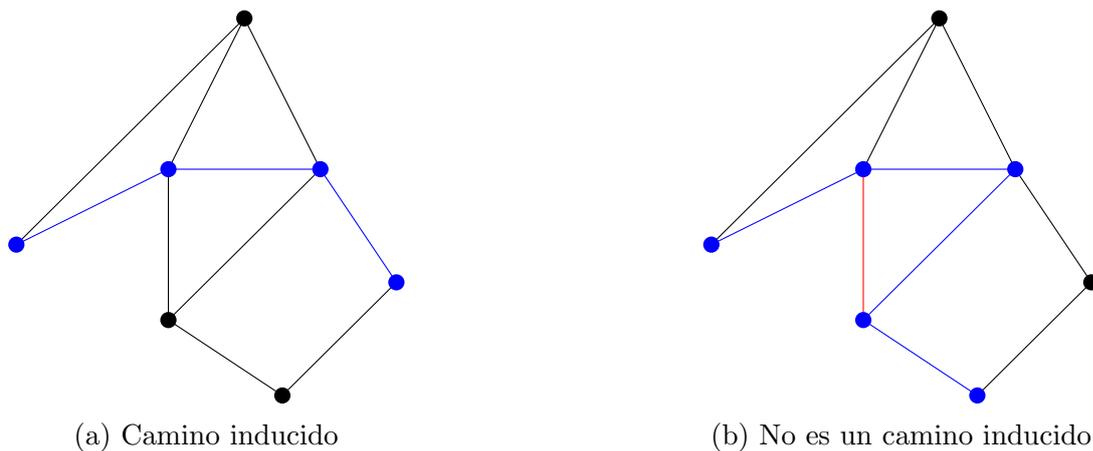


Figura 1.4: El camino azul de (a) es un camino inducido. En cambio, el de (b) no lo es, debido a la arista roja.

Dos vértices están *conectados* en un grafo G si existe un camino que empieza en uno de los vértices y termina en el otro. Un *grafo conexo* es uno en el que todos los vértices están conectados de a pares. Una *componente conexa* o simplemente *componente* de un grafo G es un subgrafo inducido maximal de G que es conexo.

La *distancia* entre dos vértices v y w en un grafo conexo G es la longitud del camino más corto entre v y w (la longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen) y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

Dado un grafo G y una arista $uv \in E(G)$, el grafo obtenido por la *subdivisión* de la arista uv es el grafo G' tal que $V(G') = V(G) \cup \{w\}$ ($w \notin V(G)$) y $E(G') = E(G) \setminus \{uv\} \cup \{uw, vw\}$. Es decir, se convierte la arista uv en un camino de longitud dos con extremos u y v . Se dice que un grafo H es *una subdivisión* del grafo G si H se obtiene a partir de G aplicando un número finito de subdivisiones de aristas.

Un *ciclo* es un camino con al menos cuatro vértices en el que el primer y último vértice son iguales y ningún otro vértice se repite. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. Una *hoja* de un árbol T es un vértice de T con grado uno.

Un árbol T es un *caterpillar* si contiene un camino inducido P tal que $V(T) = N[P]$. Un *caterpillar de pelo largo* es una subdivisión de un caterpillar.

Un *bosque* es un grafo sin ciclos, es decir, un grafo tal que cada una de sus componentes conexas es un árbol. Equivalentemente, un bosque es la unión disjunta de árboles.

Un grafo H es un *subgrafo prohibido* para una determinada clase de grafos si un grafo en dicha clase no puede contener a H como subgrafo inducido. El subgrafo prohibido es *minimal* si cualquier subgrafo inducido propio de él pertenece a la clase.

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El *grafo de intersección* de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice y conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es el grafo de intersección de alguna familia. Tiene sentido entonces estudiar familias particulares.

Un *grafo de intervalos* es el grafo intersección de intervalos en una recta. La *thinness* es la generalización de los grafos de intervalos:

Teorema 1. [30, 32] *Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo de intervalos si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$, si $v_r v_t \in E$, entonces $v_r v_s \in E$.*

A su vez, la *thinness* propia es la generalización de los grafos de intervalos propios, los cuales son grafos de intervalos que admiten un modelo de intersección en el cual ningún intervalo está propiamente contenido en otro.

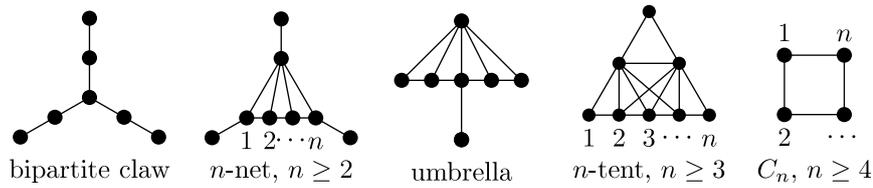


Figura 1.5: Subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de los grafos de intervalos.

Teorema 2. [33] *Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo de intervalos propios si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$, si $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$ y $v_r v_s \in E$.*

Notemos que estas caracterizaciones corresponden, respectivamente, a las definiciones de thinness y thinness propia para el caso de $k = 1$, es decir, todos los vértices en la misma clase. Eso implica que los grafos de intervalos y los 1-thin son la misma clase, y los de intervalos propios y los 1-thin propios son la misma clase.

Los grafos de intervalos, y por lo tanto los grafos de thinness 1, pueden reconocerse en tiempo polinomial [13] y fueron caracterizados por subgrafos inducidos prohibidos [27].

Teorema 3. [27] *Los subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de los grafos de intervalos son: bipartite claw, n-net para $n \geq 2$, umbrella, n-tent para $n \geq 3$, y C_n para $n \geq 4$ (Figura 1.5).*

También los grafos de intervalos propios, y por lo tanto los grafos de thinness propia 1, pueden reconocerse en tiempo polinomial [21] y fueron caracterizados por subgrafos inducidos prohibidos [33].

Teorema 4. [33] *Un grafo es de intervalos propios si y sólo si es un grafo de intervalos y no tiene como subgrafo inducido el claw (Figura 2.1b). Equivalentemente, los subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de los grafos de intervalos propios son: claw, net, tent, y C_n para $n \geq 4$ (Figura 1.6).*

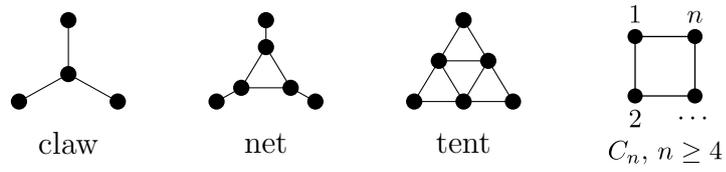
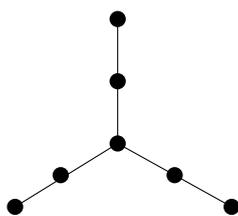


Figura 1.6: Subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de grafos de intervalos propios

Caracterización de árboles de thinness propia 2

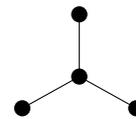
2.1. Árboles y bosques de intervalos e intervalos propios

Es fácil ver que todo caterpillar es un grafo de intervalos. Además, el grafo de la Figura 2.1a es conocido por ser uno de los subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de los grafos de intervalos [27]. Por lo tanto, los árboles de intervalos son exactamente los caterpillars, y los bosques de intervalos resultan ser la unión disjunta de caterpillars.



bipartite claw

(a) Subgrafo inducido prohibido minimal para intervalos



claw

(b) Subgrafo inducido prohibido minimal para intervalos propios

Figura 2.1: Árboles que son subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de grafos de intervalos e intervalos propios

A su vez, el grafo de la Figura 2.1b, conocido como *claw* o $K_{1,3}$, es conocido por ser el único subgrafo inducido prohibido minimal para la clase de los grafos de intervalos propios, dentro de la clase de los grafos de intervalos [33]. Por lo tanto, los árboles de intervalos propios son solo los caminos, y los bosques de intervalos propios resultan ser la unión disjunta de caminos.

Entonces, en la partición de una representación thin de un grafo, cada una de las clases es unión disjunta de caterpillars y para una representación thin propia, unión disjunta de caminos.

2.2. Caracterización estructural

En [8, 14] se demostró que para el caso de la thinness de los árboles, es válido el siguiente resultado: Dado un árbol T con thinness igual a k , siempre se puede obtener un camino simple C tal que todas las componentes conexas de $T - N[C]$ tienen thinness menor a k , y además los vértices de $N[C]$ forman una de las clases de una partición k -thin de T .

En este trabajo, intentamos obtener un resultado parecido para el caso de la thinness propia, en este caso, tomando un camino simple C en T y observando la thinness de las componentes conexas de $T - C$. Mostraremos que este resultado es válido para el caso de los árboles de thinness propia 2, es decir, siempre existe un camino simple C tal que se puede tomar una partición (que es fuertemente consistente con algún ordenamiento) en dos clases: una con los vértices de C y otra con los vértices de $T - C$.

2.2.1. Resultados auxiliares

Empezamos enunciando y demostrando algunos resultados que necesitaremos para demostrar la caracterización.

Proposición 1. *Sea $T = (V, E)$ un árbol. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, \dots, V^k\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sea v un vértice de T tal que $v \in V^i$. Entonces hay a lo sumo dos vértices u y w en $V^i \cap N(v)$, y vale que $u < v < w$.*

Demostración. Supongamos que hay dos vértices u y w en $V^i \cap N(v)$ tales que $v < u < w$. Como v y u pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w , entonces u es adyacente a w , lo cual contradice que T es un árbol. De forma equivalente, no puede pasar que haya dos vértices u y w en $V^i \cap N(v)$ tales que $u < w < v$. \square

Proposición 2. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sea v un vértice de T tal que $v \in V^0$. Sean w_1, w_2 y w_3 tres vértices que pertenecen a $N(v) \cap V^1$. Si $w_1 < w_2 < w_3$, entonces $d(w_2) = 1$.

Demostración. Supongamos que existe un vértice $u \neq v$ tal que u es adyacente a w_2 . Como T es un árbol, vale que $u \neq w_1$ y $u \neq w_3$. Podemos ver que en todos los casos se llega a que existe una adyacencia entre algún par de vértices que forma un ciclo, por lo que contradice el hecho de que T es un árbol:

- Si $u \in V^1$:
 - Si $u < w_1$, vale que $u < w_1 < w_2$, y como u y w_1 pertenecen a la misma clase y u es adyacente a w_2 , entonces w_1 es adyacente a w_2 .
 - Si $u > w_3$, vale que $w_2 < w_3 < u$, y como u y w_3 pertenecen a la misma clase y u es adyacente a w_2 , entonces w_2 es adyacente a w_3 .
 - Si $w_1 < u < w_2$:
 - Si $v < u$, vale que $v < u < w_2$, y como u y w_2 pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_2 , entonces v es adyacente a u .
 - Si $u < v$, vale que $w_1 < u < v$, y como w_1 y u pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_1 , entonces u es adyacente a v .
 - Si $w_2 < u < w_3$:
 - Si $v < u$, vale que $v < u < w_3$, y como u y w_3 pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_3 , entonces v es adyacente a u .
 - Si $u < v$, vale que $w_2 < u < v$, y como w_2 y u pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_2 , entonces u es adyacente a v .
- Si $u \in V^0$:
 - Si $u < w_1$, vale que $u < w_1 < w_2$, y como w_1 y w_2 pertenecen a la misma clase y u es adyacente a w_2 , entonces u es adyacente a w_1 .
 - Si $u > w_3$, vale que $w_2 < w_3 < u$, y como w_2 y w_3 pertenecen a la misma clase y u es adyacente a w_2 , entonces w_3 es adyacente a u .
 - Si $w_1 < u < w_2$:
 - Si $v < u$, vale que $v < u < w_3$, y como v y u pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_3 , entonces u es adyacente a w_3 .

- Si $u < v$, vale que $w_1 < u < v$, y como u y v pertenecen a la misma clase y w_1 es adyacente a v , entonces w_1 es adyacente a u .
- Si $w_2 < u < w_3$:
 - Si $v < u$, vale que $v < u < w_3$, y como u y v pertenecen a la misma clase y v es adyacente a w_3 , entonces u es adyacente a w_3 .
 - Si $u < v$, vale que $w_1 < u < v$, y como u y v pertenecen a la misma clase y w_1 es adyacente a v , entonces w_1 es adyacente a u

□

Definición 3. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes tales que $v_0 \in V^0$ y $v_1 \in V^1$. Sea u un vértice distinto a v_0 y v_1 .

- Si, o bien $u \in V^0$ y $u < v_0$, o bien $u \in V^1$ y $u < v_1$, decimos que u está **antes** que la arista v_0v_1 en σ .
- Si en cambio, o bien $u \in V^0$ y $v_0 < u$, o bien $u \in V^1$ y $v_1 < u$, decimos que u está **después** que la arista v_0v_1 en σ .

Definición 4. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes tales que $v_0 \in V^0$ y $v_1 \in V^1$. Sea u un vértice distinto a v_0 y v_1 .

- Si $u < v_0$ y $u < v_1$, decimos que u está **estrictamente antes** que la arista v_0v_1 en σ .
- Si $v_0 < u$ y $v_1 < u$, decimos que u está **estrictamente después** que la arista v_0v_1 en σ .

Proposición 3. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes tales que $v_0 \in V^0$ y $v_1 \in V^1$. Sea u un vértice distinto a v_0 y v_1 .

- Si u está estrictamente antes que la arista v_0v_1 en σ , entonces está antes que la arista v_0v_1 en σ .
- Si u está estrictamente después que la arista v_0v_1 en σ , entonces está después que la arista v_0v_1 en σ .

Proposición 4. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes tales que $v_0 \in V^0$ y $v_1 \in V^1$.*

- *Sea u un vértice que no es adyacente a v_0 ni a v_1 tal que $u < v_0$. Entonces u está estrictamente antes que la arista v_0v_1 .*
- *De forma análoga, si u no es adyacente a v_0 ni a v_1 y $v_0 < u$, vale que u está estrictamente después que la arista v_0v_1 .*

Demostración. Sea u un vértice que no es adyacente a v_0 ni a v_1 tal que $u < v_0$. Queremos probar que $u < v_1$. Supongamos que no vale la desigualdad. Entonces, $v_1 < u < v_0$. Pero entonces, como v_0 es adyacente a v_1 :

- Si u y v_0 pertenecen a la misma clase, entonces u es adyacente a v_1 .
- Si u y v_1 pertenecen a la misma clase, entonces u es adyacente a v_0 .

En ambos casos se llega a una contradicción. □

Proposición 5. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes tales que $v_0 \in V^0$ y $v_1 \in V^1$. Sea u un vértice que está antes que la arista v_0v_1 en σ y w un vértice que está después que la arista v_0v_1 en σ . Entonces no puede existir un camino de u a w que no pase por v_0 ni por v_1 .*

Demostración. Supongamos que existe un camino $u = u_0 \dots u_k = w$ tal que $u_i \neq v_0$ y $u_i \neq v_1 \forall i$. Como u está antes que v_0v_1 y w está después, existe algún i tal que u_i está antes que v_0v_1 y u_{i+1} está después. Podemos ver que en todos los casos se llega a que existen adyacencias entre los vértices que contradicen el hecho de que T es un árbol:

- Si u_i y u_{i+1} pertenecen a la misma clase, por ejemplo, $u_i \in V^0$ y $u_{i+1} \in V^0$, y como $u_i < v_0 < u_{i+1}$, vale que v_0 es adyacente a u_i y a u_{i+1} .
- Si u_i y u_{i+1} pertenecen a clases distintas, por ejemplo, $u_i \in V^0$ y $u_{i+1} \in V^1$. Supongamos, s.p.g., que $u_i < u_{i+1}$:
 - Si $u_i < v_0, v_1 < u_{i+1}$, entonces v_0 es adyacente a u_{i+1} y v_1 es adyacente a u_i .
 - Si $v_0 < u_i < u_{i+1} < v_1$ (s.p.g.), entonces v_0 es adyacente a u_{i+1} y v_1 es adyacente a u_i .

- Si $u_i < v_1 < u_{i+1} < v_0$ (s.p.g.), entonces v_0 es adyacente a u_{i+1} y v_1 es adyacente a u_i .

□

Definición 5. Sea $T = (V, E)$ un árbol. Sean v_0, v_1, v_2 y v_3 cuatro vértices distintos de T . Llamamos, para $i \in \{1, 2, 3\}$, C_i al único camino simple de v_0 a v_i y $C'_i = C_i - \{v_0\}$. Decimos que el vértice v_0 es el **nexo** entre los vértices v_1, v_2 y v_3 si $C'_1 \cap C'_2 = \emptyset$, $C'_1 \cap C'_3 = \emptyset$ y $C'_2 \cap C'_3 = \emptyset$.

Proposición 6. Sea $T = (V, E)$ un árbol. Sean v_0, v_1, v_2 y v_3 cuatro vértices distintos de T tales que v_0 es el nexo entre v_1, v_2 y v_3 . Entonces, no puede pasar que exista un camino simple que incluya a v_1, v_2 y v_3 .

Demostración. Supongamos que no se cumple lo que queremos demostrar. Supongamos entonces, s.p.g., que el único camino simple C de v_1 a v_3 pasa por v_2 . Pero entonces, si existe un vértice v_0 que es el nexo entre los 3 vértices, para $i \in 1, 2, 3$, existen caminos C'_i de v_0 a los otros 3 vértices (disjuntos entre sí). Sea w el primer vértice que aparece en el camino C'_2 (yendo desde v_0 hacia v_2) tal que $w \in C$ (puede pasar que $w = v_0$). Supongamos (s.p.g.) que w está en el subcamino entre v_1 y v_2 (puede pasar que $w = v_2$). Entonces, como $v_2 \notin C'_3$, existen dos caminos distintos de v_0 a v_3 : uno es C_3 y el otro es el que pasa por w y por v_2 . Pero esto contradice que T es un árbol. □

Proposición 7. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) \geq 4$, entonces no puede existir un vértice w ($w \neq v_1$ y $w \neq v_3$) adyacente a v_2 tal que el único camino simple de v_2 a v_1 pasa por w y el único camino simple de v_2 a v_3 pasa por w .

Demostración. Supongamos, s.p.g., que $v_2 \in V^0$. Supongamos que existe el vértice w adyacente a v_2 tal que el único camino simple de v_2 a v_1 y el único camino simple de v_2 a v_3 pasan por w . Como $d(v_2) \geq 4$, por la Proposición 1 existe un vértice $x \in V^1$ adyacente a v_2 tal que $x \neq w$. Además, como $v_1 < v_2$ y no son adyacentes, por la Proposición 4, v_1 está estrictamente antes que la arista v_2x (y por la Proposición 3, en particular está antes). De forma análoga, v_3 está después que la arista v_2x . Por la Proposición 5, o bien no puede existir un camino simple de w a v_1 que no pase por v_2 ni por x (si w está después que v_2x), o bien no puede existir un camino simple de w a v_3 que no pase por v_2 ni por x (si w está antes que v_2x). □

Corolario 1. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) \geq 4$, entonces el único camino simple de v_1 a v_3 pasa por v_2 .

Demostración. Por la Proposición anterior, no puede existir un vértice w ($w \neq v_1$ y $w \neq v_3$) adyacente a v_2 tal que el único camino simple de v_2 a v_1 pasa por w y el único camino simple de v_2 a v_3 pasa por w . Luego, existen dos vértices u y v ($u \neq v$) adyacentes a v_2 tales que el único camino simple de v_2 a v_1 pasa por u y el único camino simple de v_2 a v_3 pasa por v . Por lo tanto, hay un camino simple $v_1 \dots uv_2v \dots v_3$. \square

Corolario 2. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) \geq 4$, entonces no puede existir un vértice v_0 que sea el nexo entre los vértices v_1, v_2 y v_3 .

Demostración. Por el Corolario anterior, sea C el único camino simple de v_1 a v_3 , que pasa por v_2 . Pero esto contradice la Proposición 6. \square

Proposición 8. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) = 3$, entonces no puede existir un vértice w ($w \neq v_1$ y $w \neq v_3$) adyacente a v_2 y un vértice u ($u \neq v_1, u \neq v_2$ y $u \neq v_3$) adyacente a w tal que el único camino simple de v_2 a v_1 pasa por u y el único camino simple de v_2 a v_3 pasa por u .

Demostración. Supongamos, s.p.g., que $v_2 \in V^0$. Supongamos que existen w y u .

- Si existe un vértice $x \in V^1$ adyacente a v_2 tal que $x \neq w$. Entonces, como $v_1 < v_2$ y no son adyacentes, por la Proposición 4, v_1 está estrictamente antes que la arista v_2x (y por la Proposición 3, en particular está antes). De forma análoga, v_3 está después que la arista v_2x . Por la Proposición 5, o bien no puede existir un camino simple de w a v_1 que no pase por v_2 ni por x (si w está después que v_2x), o bien no puede existir un camino simple de w a v_3 que no pase por v_2 ni por x (si w está antes que v_2x).
- Si no, el único vértice en V^1 adyacente a v_2 es w . Como $v_1 < v_2$ y v_1 no es adyacente a v_2 ni a w , por la Proposición 4, v_1 está estrictamente antes que la arista v_2w (y por la Proposición 3, en particular está antes). De forma análoga, v_3 está después que la arista v_2w . Por la Proposición 5, o bien no puede existir

un camino simple de u a v_1 que no pase por v_2 ni por w (si u está después que v_2w), o bien no puede existir un camino simple de u a v_3 que no pase por v_2 ni por w (si u está antes que v_2w).

□

Corolario 3. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) = 3$, entonces, o bien el único camino simple de v_1 a v_3 pasa por v_2 , o bien existe algún vértice v_0 en el camino simple de v_1 a v_3 tal que v_0 es adyacente a v_2 .*

Demostración. Sea C_0 el único camino simple de v_1 a v_3 . Supongamos que no es cierto lo que queremos demostrar, es decir, $v_2 \notin C_0$ y no hay ningún vértice en C_0 que sea adyacente a v_2 . Sea v el vértice de C_0 más cercano a v_2 . Entonces, el único camino de v_2 a v_1 pasa por v y el único camino simple pasa por v . Sea C_2 el único camino simple de v_2 a v . Como C_2 tiene al menos 3 vértices, $C_2 = v_2, w, u, \dots$. Pero entonces, estos vértices w y u cumplen lo que dijimos en la Proposición anterior que no podía pasar, por lo que llegamos a una contradicción. □

Corolario 4. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vértices tales que $v_1 < v_2 < v_3$. Si $d(v_2) = 3$ y existe un vértice v_0 que es el nexo entre los vértices v_1, v_2 y v_3 , entonces v_0 es adyacente a v_2 .*

Demostración. Por el Corolario anterior, como $d(v_2) = 3$, hay dos posibilidades: que v_2 pertenezca al camino entre v_1 y v_3 , o que sea adyacente al camino. Pero como además existe un nexo entre v_1, v_2 y v_3 , no puede pasar que los 3 vértices pertenezcan al mismo camino. Entonces, la primera opción no puede pasar, es decir, que v_2 es adyacente a un vértice w del camino. Como w es nexo y el nexo es único, $w = v_0$. □

Proposición 9. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Sean σ un ordenamiento y $S = \{V^0, V^1\}$ una partición en clases de los vértices tales que σ y S son fuertemente consistentes. Sean v_1, v_2, v_3 y v_4 cuatro vértices que forman un camino v_1, v_2, v_3, v_4 y que están alternados en las clases (por ejemplo, $v_1, v_3 \in V^0$ y $v_2, v_4 \in V^1$). Entonces, no pueden pasar a la vez que $v_1 < v_3$ y $v_4 < v_2$ ni tampoco que $v_3 < v_1$ y $v_2 < v_4$.*

Demostración. Supongamos que valen a la vez $v_1 < v_3$ y $v_4 < v_2$. Queremos ver que se llega a una contradicción:

- Si $v_1 < v_4$, como además vale que $v_4 < v_2$, se cumple la desigualdad $v_1 < v_4 < v_2$. Y como v_2 y v_4 están en la misma clase y v_1 es adyacente a v_2 , entonces v_1 tiene que ser adyacente a v_4 .
- Si $v_4 < v_1$, como además vale que $v_1 < v_3$, se cumple la desigualdad $v_4 < v_1 < v_3$. Y como v_1 y v_3 están en la misma clase y v_3 es adyacente a v_4 , entonces v_1 tiene que ser adyacente a v_4 .

En ambos casos llegamos a que v_1 tiene que ser adyacente a v_4 . Pero entonces se forma un ciclo entre los 4 vértices, lo que contradice que T es un árbol. \square

Proposición 10. *Sea T un árbol tal que $\text{pthin}(T) = 2$. Entonces existe algún vértice en T con grado mayor o igual a 3.*

Demostración. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Supongamos que no vale lo que queremos demostrar, es decir, $d(v) \leq 2 \forall v \in V$. Luego, como T es un árbol, T es un camino simple v_1, \dots, v_n . Pero entonces existe un ordenamiento $v_1 < \dots < v_n$ que es fuertemente consistente con $S' = \{V\}$, por lo que $\text{pthin}(T) = 1$. \square

Proposición 11. *Sea T un árbol tal que $\text{pthin}(T) = 2$. Si v es un vértice de T con grado mayor o igual a 5, entonces a lo sumo 4 de sus vecinos tienen grado mayor a 1.*

Demostración. Sea v un vértice de T con $d(v) \geq 5$. Por la Proposición 1, existen a lo sumo dos vértices de $N(v)$ en la misma clase que v . Sean $v_1 < \dots < v_l$ los vértices vecinos a v en la otra clase. Por la Proposición 2, de todos esos vértices, sólo v_1 y v_l pueden tener grado mayor a 1. \square

Proposición 12. *Sea T un árbol tal que $\text{pthin}(T) = 2$. Entonces, existe un camino simple C_0 en T tal que:*

1. Todos los vértices de T con grado mayor o igual a 4 están en C_0 .
2. Si algún vértice v de grado 3 no está en C_0 , entonces:
 - a) v es adyacente a un vértice w de C_0 .
 - b) El grado de w es menor o igual a 3.

Demostración. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $\text{pthin}(T) = 2$. Es decir, existen un ordenamiento σ y una partición en clases de los vértices $S = \{V^0, V^1\}$ fuertemente consistentes. Queremos probar que existe un camino simple C_0 que cumpla 1. y 2.:

1. Supongamos que no vale 1., es decir, existen 3 vértices v_1, v_2 y v_3 con $d(v_1) \geq 4$, $d(v_2) \geq 4$ y $d(v_3) \geq 4$ que no pueden estar en el mismo camino simple. Supongamos, s.p.g., que $v_1 < v_2 < v_3$. Pero por el Corolario 1 el único camino simple de v_1 a v_3 pasa por v_2 , lo cual contradice lo anterior. Por lo tanto, existe un camino C_1 que contiene a todos los vértices de T de grado mayor o igual a 4.
2. a) Por lo anterior, si $\text{pthin}(T) = 2$, sea $C_1 = u_0, \dots, u_k$ el camino que existe por el punto anterior. Sea $W_1 = \{w_0, \dots, w_l\}$ el conjunto de vértices de grado 3 que no están en C_1 y que no son adyacentes a C_1 . Queremos construir un camino C_2 que también cumpla la condición del punto anterior y tal que el conjunto W_2 de vértices de grado 3 que no están en C_2 y que no son adyacentes a C_2 está contenido en $\{w_1, \dots, w_l\}$. Sea u_i el vértice de C_2 tal que el camino simple de u_r a w_0 no pasa por ningún otro vértice de C_2 . Veamos que en todos los casos, se puede tomar $C_2 = u_0, \dots, u_i, \dots, w_0$ o $C_2 = w_0, \dots, u_i, \dots, u_k$. Para eso, separemos en casos viendo los subcaminos u_0, \dots, u_{i-1} y u_{i+1}, \dots, u_k y veamos que en todos los casos se puede desechar uno de estos dos subcaminos:
 - Si en ambos subcaminos hay algún vértice de grado 4, sean v_1 y v_2 dos vértices de grado 4, uno en cada subcamino.
 - Si $v_1 < w_0 < v_2$ o $v_2 < w_0 < v_1$, el Corolario 3 contradice el hecho de que w_0 no pertenece al único camino simple entre v_1 y v_2 ni es adyacente a un vértice de ese camino.
 - Si $w_0 < v_1 < v_2$, $v_2 < v_1 < w_0$, $v_1 < v_2 < w_0$ o $w_0 < v_2 < v_1$, el Corolario 2 contradice el hecho de que u_i es el nexa entre w_0, v_1 y v_2 .
 - Si en uno de los dos subcaminos hay algún vértice v_1 de grado 4 y en el otro no:
 - Si en el otro subcamino no hay vértices de grado 3 ni vértices adyacentes a algún vértice de grado 3 por fuera del camino, se puede desechar ese subcamino.
 - Si en el otro subcamino hay un único vértice de grado 3 que es adyacente a u_i y además no hay vértices adyacentes a uno de grado 3 por fuera del camino, se puede desechar ese subcamino.
 - Si no pasa ninguna de las dos opciones anteriores, en el otro subcamino hay, o bien un vértice v_2 de grado 3 que no es adyacente a u_i , o bien un vértice adyacente a algún vértice v_2 de grado 3

por fuera del camino. En ambos casos, tenemos que u_i es el nexo entre w_0 , v_1 y v_2 , y además u_i no es adyacente a w_0 ni a v_2 . Pero entonces:

- Si $v_2 < v_1 < w_0$ o $w_0 < v_1 < v_2$, el Corolario 2 contradice el hecho de que u_i es el nexo entre los vértices w_0 , v_1 y v_2 .
- Si $v_1 < w_0 < v_2$, $v_2 < w_0 < v_1$, $w_0 < v_2 < v_1$ o $v_1 < v_2 < w_0$, el Corolario 4 contradice el hecho de que u_i es el nexo entre los vértices w_0 , v_1 y v_2 .
- Si no hay vértices de grado 4 en ninguno de los dos subcaminos:
 - Si en alguno de los dos subcaminos no hay vértices de grado 3 ni vértices adyacentes a algún vértice de grado 3 por fuera del camino, se puede desechar ese subcamino.
 - Si en alguno de los dos subcaminos hay un único vértice de grado 3 que es adyacente a u_i y además ese subcamino no tiene vértices adyacentes a algún vértice de grado 3 por fuera del camino, se puede desechar ese subcamino.
 - Si no pasa ninguna de las dos opciones anteriores, en ambos subcaminos hay, o bien algún vértice v_j de grado 3 que no es adyacente a u_i , o bien un vértice adyacente a algún vértice v_j de grado 3 por fuera del camino. En todos los casos, tenemos que u_i es el nexo entre w_0 , v_1 y v_2 (siendo v_1 y v_2 los v_j que existen para cada uno de los dos subcaminos) y además u_i no es adyacente a ninguno de estos 3 vértices. Pero el Corolario 4 contradice el hecho de que u_i sea el nexo entre estos 3 vértices.

Por lo tanto, llegamos a que en todos los casos posibles se puede construir el camino C_2 . Podemos seguir repitiendo este proceso tomando caminos C_3, C_4, \dots caminos tales que todos cumplen la condición del punto 1. y para todo i vale que W_i está incluido estrictamente en W_{i-1} . Eventualmente, obtenemos un camino C_j tal que $W_j = \emptyset$. Por lo tanto, el camino $C'_0 = C_j$ cumple con 1. y con 2.(a).

b) Por lo anterior, si $\text{pthin}(T) = 2$, sea $C'_0 = v_0, \dots, v_k$ el camino que existe por 1) y 2)a). Sea $v_3 \notin C'_0$ con $d(v_3) = 3$, y sea $w \in C'_0$ adyacente a v_3 . Queremos probar que $d(w) = 3$:

- Por un razonamiento análogo al del punto anterior, si alguno de los subcaminos de w en C'_0 no tiene ningún vértice de grado ≥ 3 , se podría

tomar un nuevo camino C''_0 desechando ese subcamino.

- Si en cambio ambos subcaminos de w en C'_0 tienen algún vértice de grado ≥ 3 , no se puede tomar un nuevo camino. Por lo tanto, para terminar la demostración, alcanza con probar que, si estando en esta situación, vale que $d(w) \geq 4$, se llega a un absurdo: Sean v_1 y v_2 dos vértices de grado mayor o igual a 3 en C'_0 , uno en cada subcamino. Sea v_i (con $i \in \{1, 2, 3\}$) el vértice intermedio en el orden entre los 3. Sabemos que $d(v_i) = 3$, ya que si $d(v_i) \geq 4$, el Corolario 2 contradice el hecho de que w sea el nexo entre los 3 vértices. Además, por el Corolario 4, sabemos que v_i es adyacente a w .
 - Si v_i y w están en la misma clase de la partición (por ejemplo, $v_i \in V^0$ y $w \in V^0$), y suponiendo que vale $v_i < w$, entonces hay un $v_j < v_i < w$ (si en cambio, $v_i > w$, tomamos $v_j > v_i > w$). Como $d(v_i) = 3$, existe un vértice $x \in V^1$ adyacente a v_i . Por lo tanto v_j es menor a la arista $v_i x$ y w es mayor, pero entonces por la Proposición 5 no puede existir el camino simple de v_j a w que no pasa por v_i ni por x .
 - Si v_i y w están en distintas clases de la partición (por ejemplo, $v_i \in V^1$ y $w \in V^0$), entonces como $d(w) \geq 4$, existe otro vértice x adyacente a w en V^1 .
 - Si $v_i < x$, entonces los otros dos vértices adyacentes a v_i (y y z) son menores a v_i . Al menos uno de estos dos, por ejemplo y , tiene que estar en V^0 . Por la Proposición 9, vale que $y < w$. Pero entonces el v_j que es menor a v_i , cumple que es menor a y (ya que si no, sería adyacente a y o a v_i dependiendo de en qué clase se encuentre). Luego, por la Proposición 5, no puede existir el camino simple de w a v_j que no pase por v_i ni por y .
 - Si $x < v_i$, por un razonamiento simétrico al anterior, por la Proposición 5, no puede existir el camino simple de w a v_k (siendo $v_i < v_k$) que no pase por v_i ni por un vecino de v_i .

□

2.2.2. Teorema de caracterización estructural

Teorema 5. *Un árbol T tiene $\text{pthin}(T) = 2$ si y sólo si valen simultáneamente:*

1. *Existe algún vértice en T con grado mayor o igual a 3.*

2. Si v es un vértice de T con grado mayor o igual a 5, entonces a lo sumo 4 de sus vecinos tienen grado mayor a 1.
3. Existe un camino simple C_0 en T tal que:
 - a) Todos los vértices de T con grado mayor o igual a 4 están en C_0 .
 - b) Si algún vértice v de grado 3 no está en C_0 , entonces:
 - 1) v es adyacente a un vértice w de C_0 .
 - 2) El grado de w es menor o igual a 3.

Demostración. \Rightarrow) Se desprende de la Proposición 10, la Proposición 11 y la Proposición 12.

\Leftarrow) Sea $T = (V, E)$ un árbol que cumple con 1., 2. y 3.. Queremos probar que $\text{pthin}(T) = 2$. Sea C_0 el camino simple que existe por 3.. Podemos tomar $C'_0 = v_1, \dots, v_k$ un camino simple que surge de C_0 extendiéndolo hasta llegar a dos hojas v_1 y v_k . Queremos probar que, si tomamos $V^0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V^1 = V \setminus V^0$, existe un ordenamiento σ fuertemente consistente con la partición en clases $S = \{V^0, V^1\}$: Arrancamos con $\sigma_0 = v_1 < \dots < v_k$ y queremos agregar al ordenamiento los vértices de V^1 . Como C'_0 es un camino simple, no existen tres vértices en V^0 que no cumplan con la condición de thinness propia, por lo que el ordenamiento σ_0 es fuertemente consistente con los vértices en V^0 . Recorremos en orden v_1, \dots, v_k agregando al ordenamiento los vértices de V^1 adyacentes a cada v_i . Como v_1 y v_k son hojas, en el primer y último paso no hay nada que agregar. Luego, para i desde 2 hasta $k - 1$:

- Si $d(v_i) = 2$, ambos vértices adyacentes a v_i están en V^0 . Luego, no hay nada que agregar, es decir $\sigma_i = \sigma_{i-1}$.
- Si $d(v_i) = 3$, existe exactamente un vértice $w_0 \in V^1$ adyacente a v_i . Hay dos posibilidades:
 - Si $d(w_0) = 3$, entonces w_0 tiene dos ramas w_1, \dots, w_l y u_1, \dots, u_m de vértices en V^1 . Tomamos σ_i agregando justo antes y justo después de v_i : $u_m < \dots < u_1 < v_i < w_0 < w_1 < \dots < w_l$.
 - Si no, a partir de w_0 hay una rama simple w_0, \dots, w_l . Tomamos σ_i agregando justo después de v_i : $v_i < w_0 < \dots < w_l$.
- Si $d(v_i) = 4$, existen exactamente dos vértices u_0 y w_0 en V^1 adyacentes a v_i , que tienen ramas simples u_0, \dots, u_m y w_0, \dots, w_l . Tomamos σ_i agregando justo antes y justo después de v_i : $u_m < \dots < u_0 < v_i < w_0 < \dots < w_l$.

- Si $d(v_i) = s$ con $s \geq 5$, existen a lo sumo dos vértices u_0 y w_0 en V^1 adyacentes a v_i que tienen ramas de más de un vértice u_0, \dots, u_m y w_0, \dots, w_l . Además, existen x_0, \dots, x_{s-4} hojas adyacentes a v_i que están en V^1 . Tomamos σ_i agregando justo antes y justo después de v_i : $u_m < \dots < u_0 < v_i < x_0 < \dots < x_{s-4} < w_0 < \dots < w_l$.

□

Corolario 5. *Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $\text{pthin}(T) = 2$. Entonces, existe un camino simple $C_0 = v_1, \dots, v_k$ en T tal que existe un ordenamiento que es fuertemente consistente con la partición en clases $S = \{V^0, V^1\}$, siendo $V^0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V^1 = V - V^0$.*

Demostración. Se desprende de la demostración anterior, usando el camino C'_0 . □

Corolario 6. *Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $\text{pthin}(T) = 2$. Entonces, existe un camino simple C_0 tal que todas las componentes conexas de $T - C_0$ tiene thinness propia igual a 1.*

Demostración. Usando el camino C_0 del Corolario anterior, como los vértices de $T - C_0$ están en la clase V^1 de la partición, entonces todas las componentes conexas de ese subgrafo tienen thinness propia igual a 1. □

2.3. Caracterización por subgrafos inducidos prohibidos mínimos

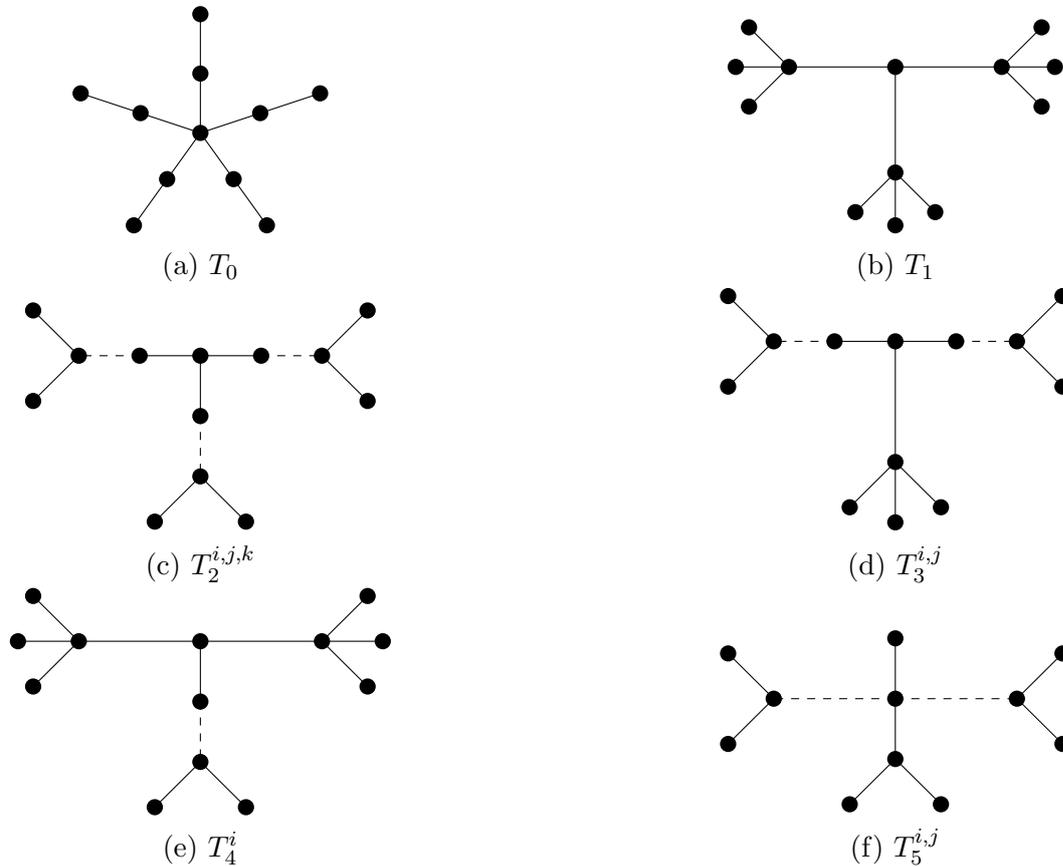


Figura 2.2: Subgrafos inducidos minimales prohibidos de árboles de thinness propia 2. Las líneas punteadas representan aristas posiblemente subdivididas.

Teorema 6. *Sea T un árbol. Entonces, $pthin(T) = 2$ si y sólo si T no contiene ninguno de los árboles de la Figura 2.2 como un subgrafo inducido y T tiene al menos un vértice de grado mayor o igual a 3.*

Demostración. \Rightarrow) Es fácil ver que cada árbol en la Figura 2.2 no cumple con una o más de las propiedades de la caracterización de los árboles que tienen thinness propia 2. Por lo tanto, si $pthin(T) = 2$, entonces estos árboles no pueden ser subgrafos inducidos de T . Además, como $pthin(T) = 2$, tiene que haber al menos un vértice de grado mayor que 2, de lo contrario T es un camino y por lo tanto $pthin(T) = 1$.

\Leftarrow) Supongamos que T no contiene ninguno de los árboles listados en la Figura 2.2 y que hay un vértice $v \in T$ tal que $d(v) \geq 3$, por lo tanto, la primera propiedad de la caracterización se cumple. Además, como T_0 no aparece como subgrafo inducido de T , la segunda propiedad también se cumple.

Veamos que se cumple la tercera propiedad. Supongamos que para cada camino simple C_0 de T , al menos una de las afirmaciones 3.a, 3.b.i o 3.b.ii no es verdadera y veamos que se llega a una contradicción.

Supongamos primero que el enunciado 3.a no se cumple. Más precisamente, para cada camino simple C_0 de T hay un vértice $v \in T$ tal que $d(v) \geq 4$ y $v \notin C_0$. Por lo tanto, hay al menos tres vértices v_1, v_2 y v_3 en T de grado mayor que 3 tales que existe un vértice v_0 que es el nexo entre esos tres vértices. Dependiendo de si v_0 es adyacente o no a los vértices v_1, v_2 y v_3 , esto implica que hay alguno de los árboles de la Figura 2.2 que es subgrafo inducido de T , por lo que llegamos a una contradicción:

- Si v_0 es adyacente a los tres vértices, T_1 es subgrafo inducido de T .
- Si v_0 es adyacente a dos de los tres vértices, T_4^i es subgrafo inducido de T (con i igual a la distancia entre v_0 y el vértice de los tres que no es adyacente).
- Si v_0 es adyacente a uno de los tres vértices, $T_3^{i,j}$ es subgrafo inducido de T (con i y j las distancias entre v_0 y los dos vértices que no son adyacentes).
- Si v_0 no es adyacente a ninguno de los tres vértices, $T_2^{i,j,k}$ es subgrafo inducido de T (con i, j y k las distancias entre v_0 y los tres vértices).

Ahora, supongamos que hay un camino simple $C_0 = v_1, \dots, v_k$ que contiene todos los vértices de grado mayor que 4, pero al menos una de las afirmaciones de 3.b no es verdadera. Sea $v \notin C_0$ un vértice de grado 3 tal que 3.b.i no se cumple para v . En otras palabras, v no es adyacente a ningún vértice de C_0 . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que v_1 y v_k son vértices de grado mayor que 2. Por hipótesis, hay un vértice $v' \notin C_0$ adyacente a v , y como T es conexo, hay un camino C_1 desde v' hasta algún vértice $v_i \in C_0$ (que no pasa por v). Podemos asumir que $i \neq 1, k$, de lo contrario podemos considerar la unión de C_0 y C_1 como un nuevo camino para el cual se cumple la tercera afirmación.

- Si $d(v_1), d(v_k) = 3$, entonces hay vértices w y w' en C_0 , $w \neq v_i \neq w'$, tales que $v_1w, w'v_k \in E(T)$, de lo contrario, podemos considerar el camino que une, o bien v y v_1 , o bien v y v_k (es decir, el extremo de C_0 que no tiene un vértice ‘intermedio’ entre sí mismo y v'). Sin embargo, en ese caso encontramos $T_2^{i,j,k}$ como un subgrafo inducido de T .
- Si $d(v_1) = 3$ y $d(v_k) \geq 4$ (s.p.g.), entonces hay un vértice w en C_0 ($w \neq v_i$) tal

que $v_1 w \in E(T)$, de lo contrario, podemos considerar el camino que une v y v_k . Sin embargo, en ese caso encontramos $T_3^{i,j}$ como un subgrafo inducido de T .

- Si $d(v_1) \geq 4$ y $d(v_k) \geq 4$, entonces:
 - Si v_i es adyacente a v_1 y a v_k , T_4^i es subgrafo inducido de T .
 - Si v_i no es adyacente a v_1 ni a v_k , $T_2^{i,j,k}$ es subgrafo inducido de T .
 - Si no, es decir, v_i es adyacente a uno sólo de los dos vértices, $T_3^{i,j}$ es subgrafo inducido de T .

En todos los casos llegamos a una contradicción.

Finalmente, sea $v \notin C_0$ un vértice de grado 3 tal que 3.b.ii no se cumple para v . Esto es, v es adyacente a algún vértice $v_i \in C_0$ tal que $d(v_i) \geq 4$. Por lo tanto, hay un vértice $w \notin C_0$ adyacente a v_i . Podemos asumir una vez más que v_1 y v_k son vértices de grado al menos 3. Sin embargo, encontramos $T_5^{i,j}$ como un subgrafo inducido, donde incluso i o j podrían ser 0. En otras palabras, no puede haber subdivisiones entre v_i y los extremos de C_0 . En este caso, no es posible considerar caminos alternativos $vv_i v_{i+1} \dots v_k$ o $vv_i v_{i-1} \dots v_1$ para los cuales se cumplen todas las afirmaciones.

De la argumentación anterior se deduce que tiene que haber un camino simple que contenga todos los vértices de grado mayor o igual que 4 y tal que se cumplan las afirmaciones 3.b.i y 3.b.ii, por lo tanto $pthin(T) = 2$. \square

Para terminar de probar la caracterización, nos falta probar que los grafos de la Figura 2.2 son minimales. Para eso, primero probamos la siguiente proposición auxiliar:

Proposición 13. *Sea T un árbol, y sean G y H dos árboles tales que H es subgrafo propio de T y G es subgrafo propio de H . Entonces, $pthin(G) \leq pthin(H)$.*

Demostración. Supongamos que $pthin(H) = n$, es decir, existen un ordenamiento σ y una partición $S = \{V^1, \dots, V^k\}$ de los vértices de H tales que σ y S son fuertemente consistentes. Tomemos un ordenamiento σ' y una partición S' de los vértices de G preservando el orden de los vértices en σ y siendo cada clase de S' un subconjunto de alguna clase de S . Queremos probar que esta partición y este orden son fuertemente consistentes:

- Sean tres vértices v_r, v_s y v_t tales que en σ' , vale $v_r < v_s < v_t$, y tales que v_r, v_s pertenecen a la misma clase de S' y v_t es adyacente a v_r . Como σ' preserva el orden de σ y S' preserva las clases de S , entonces v_t es adyacente a v_s en H . Por lo tanto, v_t también es adyacente a v_s en G .

- De forma análoga, si v_s, v_t pertenecen a la misma clase de S' y v_t es adyacente a v_r , llegamos a que v_r también es adyacente a v_s en G .

Luego, como S' tiene a lo sumo k clases, llegamos a que $pthin(G) \leq pthin(H)$. \square

Ahora sí, probamos que son minimales:

Proposición 14. *Los grafos en la Figura 2.2 son minimales.*

Demostración. Para probar que los grafos de la figura son minimales, alcanza con ver que para todos esos grafos, todos sus subgrafos propios conexos (es decir, que son árboles) tienen thinness propia igual a 2. Para mostrar que estos subárboles tienen thinness propia igual a 2, mostramos una representación 2-thin propia de cada uno.

Además, por la Proposición 13, alcanza con probar que, siendo T alguno de los árboles de la figura, $pthin(G) = 2$ para todo G subgrafo propio conexo de T tal que G no es a su vez subgrafo propio de H (siendo H también un subgrafo propio de T).

- T_0 : El único subgrafo propio que no es subgrafo propio de algún otro es:



Figura 2.3: Subgrafo propio de T_0

- T_1 : El único subgrafo propio que no es subgrafo propio de algún otro es:

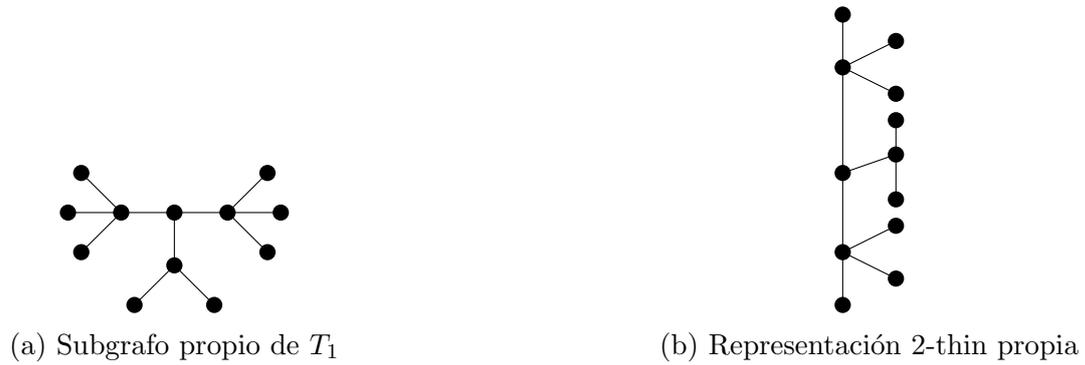


Figura 2.4: Subgrafo propio de T_1

- $T_2^{i,j,k}$: El único subgrafo propio que no es subgrafo propio de algún otro es:

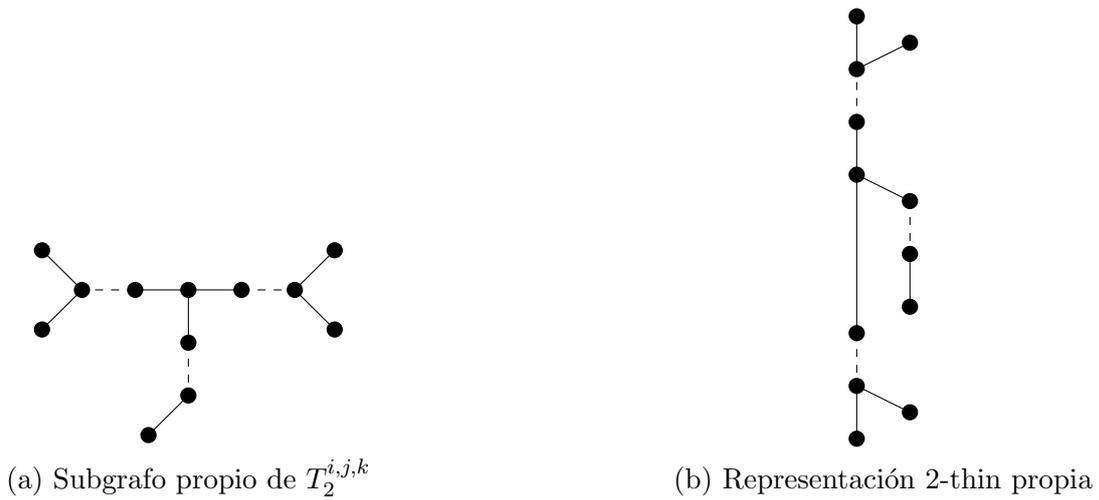


Figura 2.5: Subgrafo propio de $T_2^{i,j,k}$

- $T_3^{i,j}$: los únicos subgrafos propios que no son subgrafo propio de algún otro son:

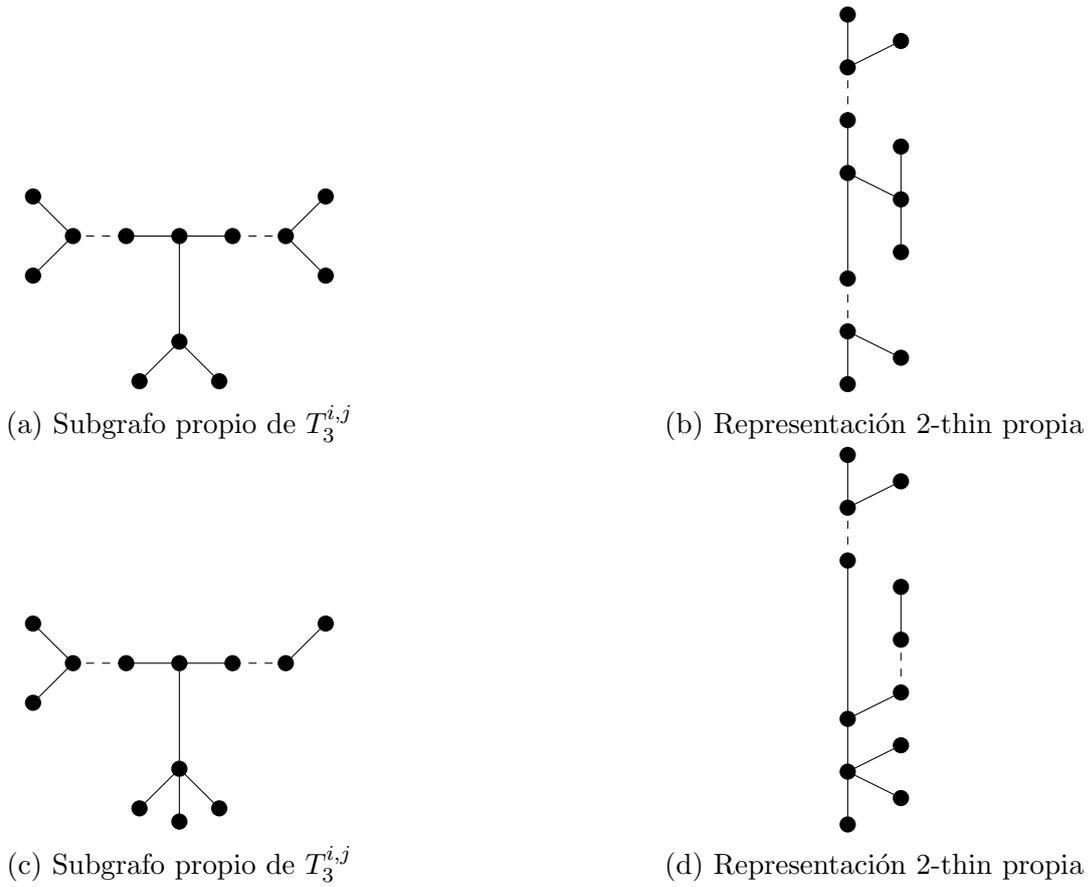
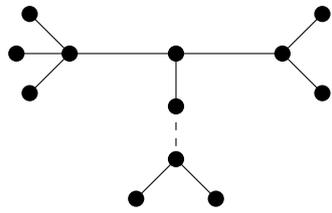
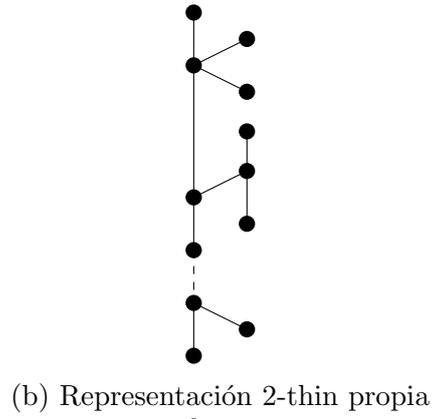


Figura 2.6: Subgráficos propios de $T_3^{i,j}$

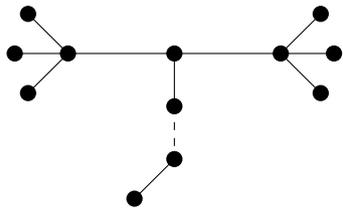
- T_4^i : los únicos subgráficos propios que no son subgrafo propio de algún otro son:



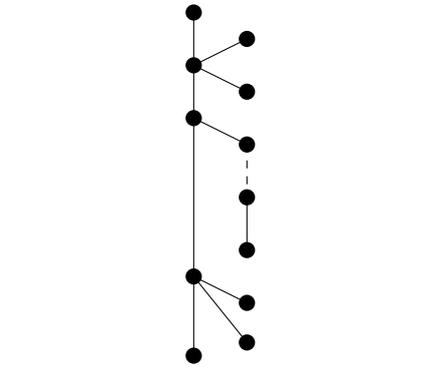
(a) Subgrafo propio de T_4^i



(b) Representación 2-thin propia



(c) Subgrafo propio de T_4^i



(d) Representación 2-thin propia

Figura 2.7: Subgrafos propios de T_4^i

- $T_5^{i,j}$: los únicos subgrafos propios que no son subgrafo propio de algún otro son:

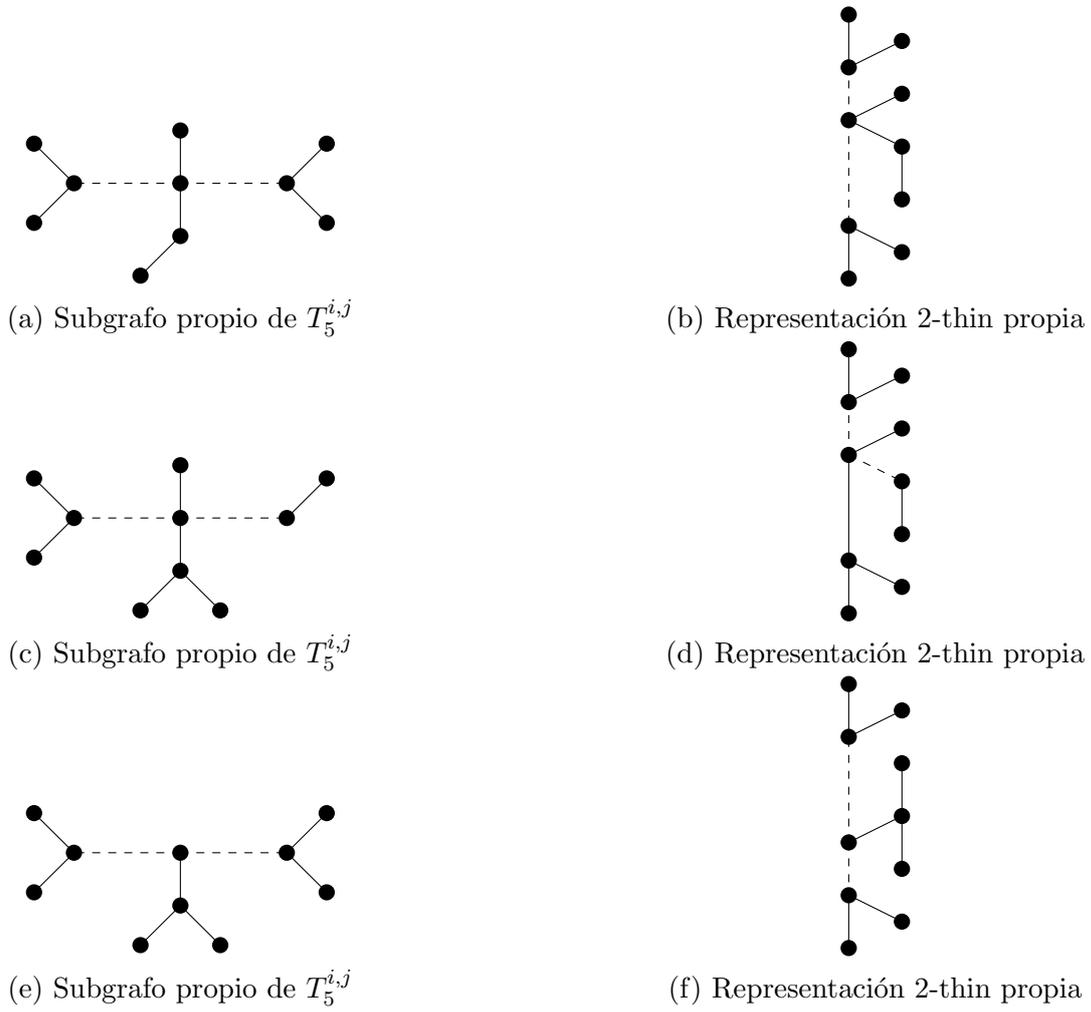


Figura 2.8: Subgrafos propios de $T_5^{i,j}$

□

CAPÍTULO 3

Intento de generalización a árboles de thinness propia 3

3.1. Resultados para generalizar

Sabemos que para el caso de los árboles con thinness propia igual a 2 son válidos los Corolarios 5 y 6.

Querríamos ver si esto se puede generalizar para los casos de los árboles con thinness propia mayor a 2, es decir, ver si puede ser cierto, dado un árbol con thinness propia igual a n (con $n > 2$):

- Que dada una partición en n clases y un ordenamiento fuertemente consistentes, exista un camino simple tal que ese camino pueda ser una de las clases de la partición.
- O bien, que exista un camino simple tal que quitando los vértices de ese camino, las componentes conexas del subgrafo resultante tengan thinness propia estrictamente menor.

3.2. Contraejemplo

Sin embargo, ninguna de estas dos afirmaciones son ciertas para el caso de los árboles con thinness propia igual a 3. Se puede probar usando el contraejemplo T_A , el cual

está formado por tres copias del árbol T_0 del Teorema 6, unidas por un vértice al que llamamos v_0 .

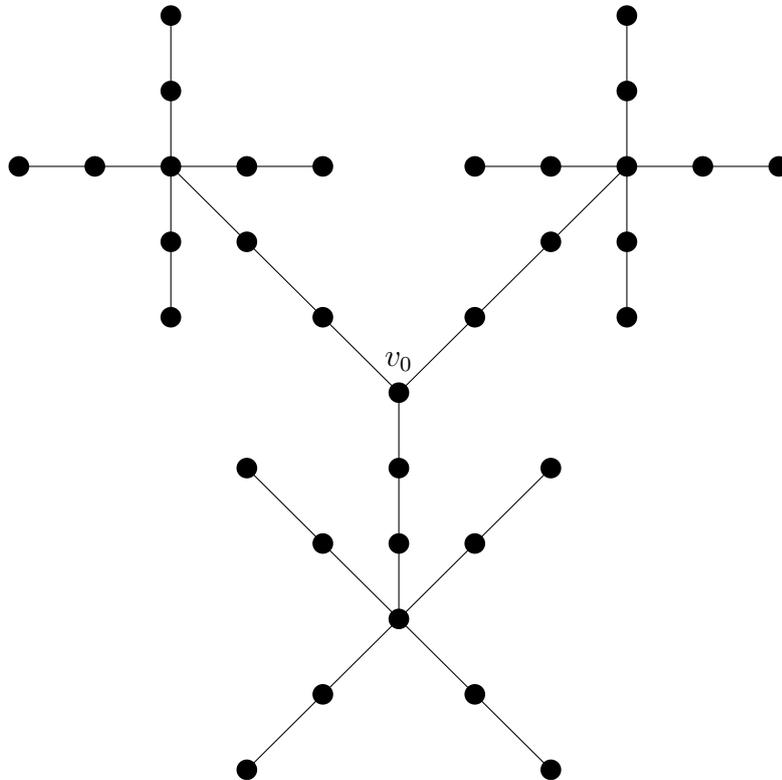


Figura 3.1: Árbol T_A

Proposición 15. T_A tiene thinness propia igual a 3.

Demostración. Para probar que $pthin(T_A) \leq 3$, mostramos una representación 3 – thin propia de T_A . Los vértices están ordenados de abajo hacia arriba y las clases corresponden a las líneas verticales.

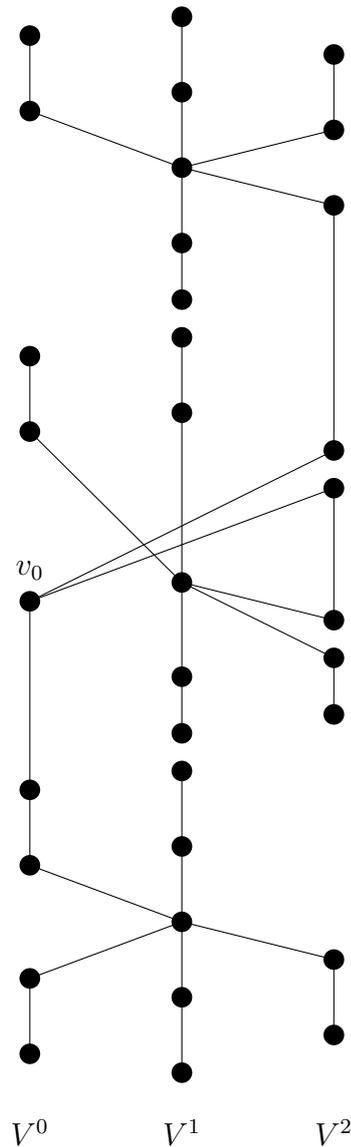


Figura 3.2: Representación 3-thin propia de T_A

Además, como T_A tiene como subárbol al grafo T_0 del Teorema 6, sabemos que $pthin(T_A) \geq 3$. □

Observación 1. Como T_A está formado por tres copias de T_0 unidas por el vértice v_0 , y ya probamos que tiene $pthin(T_0) = 3$, entonces, dados $S = \{V^0, V^1, V^2\}$ una partición en clases de los vértices de T_A y σ un ordenamiento de los vértices tal que

S y σ son fuertemente consistentes, cada uno de esos tres subárboles tiene al menos un vértice en cada una de las tres clases.

Proposición 16. *Sea $S = \{V^0, V^1, V^2\}$ una partición en clases de los vértices de T_A y sea σ un ordenamiento de los vértices tal que S y σ son fuertemente consistentes. Entonces, los subgrafos inducidos $T_A[V^0]$, $T_A[V^1]$ y $T_A[V^2]$ no son conexos.*

Demostración. Supongamos (s.p.g.) que $v_0 \in V^0$. Veamos que los subgrafos inducidos por V^0 , V^1 y V^2 no son conexos:

- V^0 : por la Proposición 1, hay a lo sumo dos vértices adyacentes a v_0 en V^0 . Por lo tanto, existe alguno de los adyacentes a v_0 en alguna de las otras clases, llamemos a ese vértice v_1 , supongamos s.p.g. que $v_1 \in V^1$. Sea w un vértice en el mismo subárbol de v_1 tal que $w \in V^0$ (sabemos que existe por la Observación 1). Pero entonces el único camino simple de w a v_0 pasa por v_1 , por lo que $T_A[V^0]$ no es conexo.
- V^1 : Por la Observación 1, sabemos que existen dos vértices w_1 y w_2 que pertenecen a dos subárboles distintos y que están en la clase V^1 , pero el único camino simple entre estos vértices pasa por v_0 , que pertenece a V^0 , por lo tanto el subgrafo inducido por V^1 no es conexo.
- V^2 : de forma equivalente al ítem anterior, se prueba que el subgrafo inducido por V^2 no es conexo.

□

Proposición 17. *Sea C_0 un camino simple de T_A . Entonces, el subgrafo $T - C_0$ tiene thinness propia igual a 3.*

Demostración. Como C_0 es un camino simple, si C_0 tuviera al menos un vértice en cada uno de los tres T_0 que tiene T_A como subárboles, entonces también valdría que $v_0 \in C_0$ y que sus tres vértices adyacentes también, lo que contradice que C_0 es un camino simple.

Por lo tanto, alguna de las copias de T_0 está contenida en $T_A - C_0$. Por el Teorema 6, sabemos que $pthin(T_A - C_0) = 3$. □

3.3. Resultados válidos para árboles de thinness propia 3

Por lo tanto, con el contraejemplo anterior demostramos que para árboles de thinness propia 3 son válidos los siguientes dos resultados:

Proposición 18. *Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $pthin(T) = 3$. Entonces, no necesariamente existe un camino simple $C_0 = v_1, \dots, v_k$ en T tal que existe un ordenamiento que es fuertemente consistente con la partición en clases $S = \{V^0, V^1, V^2\}$ (siendo $V^0 = \{v_1, \dots, v_k\}$).*

Proposición 19. *Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $pthin(T) = 3$. Entonces, no necesariamente existe un camino simple $C_0 = v_1, \dots, v_k$ en T tal que todas las componentes conexas de $T - C_0$ tienen thinness propia menor a 3.*

CAPÍTULO 4

Conclusiones y trabajo futuro

Demostramos que a los árboles de thinness propia 2 se los puede caracterizar estructuralmente a partir de un camino simple, cuyos vértices forman una de las clases de una partición fuertemente consistente con algún ordenamiento. Además, a partir de ese resultado, obtuvimos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales.

También probamos que este comportamiento no se puede replicar para el caso de los árboles de thinness propia 3, con lo cual el comportamiento de estas dos clases de grafos con respecto a la thinness propia es diferente.

Algunos puntos que quedan para trabajo futuro:

- Derivar un algoritmo de reconocimiento eficiente para árboles de thinness propia 2 a partir de la caracterización, que genere además un orden y partición fuertemente consistentes.
- Caracterizar los árboles de thinness propia 3. Como punto de partida, obtener computacionalmente una lista de árboles minimales de thinness propia 4 para tratar de entender su estructura.
- Investigar si para los árboles de thinness propia mayor a 3, el comportamiento es similar a los de thinness propia 2 o a los de thinness propia 3.

-
- Estudiar si la caracterización a partir de un camino simple, si bien no es válida para thinness propia igual a 3, puede ser útil extenderla para valores de thinness propia mayores o iguales a 3. Por ejemplo, con el objetivo de obtener una cota para el valor de la thinness propia de un árbol.

Bibliografía

- [1] J. Balabán, P. Hlinený, and J. Jedelský. Twin-width and transductions of proper k -mixed-thin graphs. arXiv: 2202.12536 [math.CO].
- [2] J. Balabán, P. Hlinený, and J. Jedelský. Twin-width and transductions of proper k -mixed-thin graphs. In M. A. Bekos and M. Kaufmann, editors, *Proceedings of the International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - WG 2022*, volume 13453 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–55. Springer, 2022.
- [3] B. Bergougnoux, J. Dreier, and L. Jaffke. A logic-based algorithmic meta-theorem for mim-width. arXiv:2202.13335 [cs.DS], 2022.
- [4] H. L. Bodlaender. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth. In *Proceedings of the 15th International Conference on Automata, Languages and Programming - ICALP 1988*, volume 317 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 105–118, 1988.
- [5] É. Bonnet, E. J. Kim, S. Thomassé, and R. Watrigant. Twin-width I: tractable FO model checking. In *Proceedings of the 61st IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science - FOCS 2020*, pages 601–612, 2020.
- [6] F. Bonomo and D. De Estrada. On the thinness and proper thinness of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 261:78–92, 2019.

-
- [7] F. Bonomo, S. Mattia, and G. Oriolo. Bounded coloring of co-comparability graphs and the pickup and delivery tour combination problem. *Theoretical Computer Science*, 412(45):6261–6268, 2011.
- [8] F. Bonomo-Braberman, E. Brandwein, C. Gonzalez, and A. Sansone. On the thinness of trees. In I. Ljubić, F. Barahona, S. Dey, and A. R. Mahjoub, editors, *Proceedings of the International Symposium on Combinatorial Optimization - ISCO 2022*, volume 13526 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 189–200, 2022.
- [9] F. Bonomo-Braberman, N. Brettell, A. Munaro, and D. Paulusma. Solving problems on generalized convex graphs via mim-width. In *Proceedings of the 17th Algorithm and Data Structures Symposium - WADS 2021*, volume 12808 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 200–214, 2021.
- [10] F. Bonomo-Braberman and G. Brito. Intersection models and forbidden pattern characterizations for 2-thin and proper 2-thin graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 339:53–77, 2023.
- [11] F. Bonomo-Braberman, C. Gonzalez, F. S. Oliveira, M. Sampaio, and J. Szwarcfiter. Thinness of product graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 312:52–71, 2022.
- [12] F. Bonomo-Braberman, F. S. Oliveira, M. Sampaio, and J. Szwarcfiter. Precedence thinness in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 323:76–95, 2022.
- [13] K. Booth and G. Lueker. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms. *Journal of Computer Science and Technology*, 13:335–379, 1976.
- [14] E. Brandwein and A. Sansone. On the thinness of trees and other graph classes. Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 2022.
- [15] G. Brito. Sobre la thinness de un grafo. Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 2020.
- [16] B. Courcelle, J. Engelfriet, and G. Rozenberg. Handle-rewriting hypergraph grammars. *Journal of Computer and System Sciences*, 46(2):218–270, 1993.
- [17] B. Courcelle, J. Makowsky, and U. Rotics. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width. *Theory of Computing Systems*, 33(2):125–150, 2000.

-
- [18] B. Courcelle and M. Mosbah. Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs. *Theoretical Computer Science*, 109:49–82, 1993.
- [19] B. Courcelle and S. Olariu. Upper bounds to the clique width of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 101(1–3):77–114, 2000.
- [20] M. Cygan, F. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshтанov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and S. Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2015.
- [21] C. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. Picinin de Mello. A linear time algorithm for proper interval graph recognition. *Information Processing Letters*, 56:179–184, 1995.
- [22] J. Ellis, I. Sudborough, and J. Turner. The vertex separation and search number of a graph. *Information and Computation*, 113(1):50–79, 1994.
- [23] M. Garey, R. Graham, D. Johnson, and D. Knuth. Complexity results for bandwidth minimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34:477–495, 1978.
- [24] M. Golumbic and U. Rotics. On the clique-width of some perfect graph classes. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 11(3):423–443, 2000.
- [25] S. Høgemo, J. A. Telle, and E. R. Vågset. Linear mim-width of trees. In *Proceedings of the International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - WG 2019*, volume 11789 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 218–231. Springer, 2019.
- [26] D. Kang, O. Kwon, T. Strømme, and J. Telle. A width parameter useful for chordal and co-comparability graphs. *Theoretical Computer Science*, 704:1–17, 2017.
- [27] C. Lekkerkerker and D. Boland. Representation of finite graphs by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51:45–64, 1962.
- [28] C. Mannino, G. Oriolo, F. Ricci, and S. Chandran. The stable set problem and the thinness of a graph. *Operations Research Letters*, 35:1–9, 2007.
- [29] B. Monien. The bandwidth minimization problem for caterpillars with hair length 3 is NP-complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(4):505–512, 1986.
- [30] S. Olariu. An optimal greedy heuristic to color interval graphs. *Information Processing Letters*, 37:21–25, 1991.
- [31] C. Papadimitriou. The NP-completeness of the bandwidth minimization problem. *Computing*, 16:263–270, 1976.

-
- [32] G. Ramalingam and C. Pandu Rangan. A unified approach to domination problems on interval graphs. *Information Processing Letters*, 27:271–274, 1988.
- [33] F. Roberts. Indifference graphs. In F. Harary, editor, *Proof Techniques in Graph Theory*, pages 139–146. Academic Press, 1969.
- [34] F. Roberts. On the boxicity and cubicity of a graph. In W. Tutte, editor, *Recent Progress in Combinatorics*, pages 301–310. Academic Press, 1969.
- [35] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors. I. Excluding a forest. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 35(1):39–61, 1983.
- [36] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.
- [37] P. Scheffler. A linear algorithm for the pathwidth of trees. In R. Bodendiek and R. Henn, editors, *Topics in Combinatorics and Graph Theory: Essays in Honour of Gerhard Ringel*, pages 613–620. Physica-Verlag HD, Heidelberg, 1990.
- [38] Y. Shitov. Graph thinness is NP-complete. Manuscript, 2021.
- [39] M. Vatshelle. *New Width Parameters of Graphs*. PhD thesis, Department of Informatics, University of Bergen, 2012.