Introducción a la Teoría de Grafos

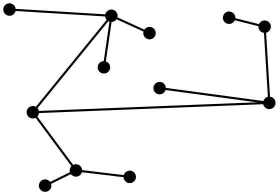
Flavia Bonomo

fbonomo@dc.uba.ar

2do. Cuatrimestre 2009

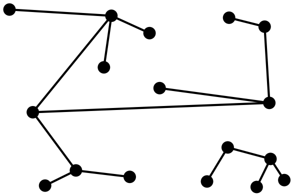
Árboles

- Un árbol es un grafo conexo y acíclico (sin ciclos).
- Un bosque es un grafo acíclico, o sea, una unión disjunta de árboles.
- Una hoja en un grafo es un vértice de grado 1.
- Un árbol generador de un grafo G es un subgrafo generador de G que es un árbol.



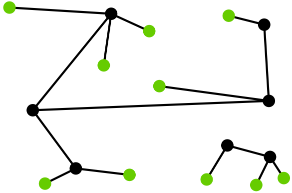
Árboles

- Un árbol es un grafo conexo y acíclico (sin ciclos).
- Un bosque es un grafo acíclico, o sea, una unión disjunta de árboles.
- Una hoja en un grafo es un vértice de grado 1.
- Un árbol generador de un grafo G es un subgrafo generador de G que es un árbol.



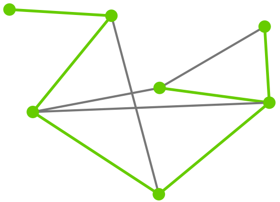
Árboles

- Un árbol es un grafo conexo y acíclico (sin ciclos).
- Un bosque es un grafo acíclico, o sea, una unión disjunta de árboles.
- Una hoja en un grafo es un vértice de grado 1.
- Un árbol generador de un grafo G es un subgrafo generador de G que es un árbol.



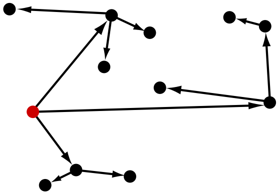
Árboles

- Un árbol es un grafo conexo y acíclico (sin ciclos).
- Un bosque es un grafo acíclico, o sea, una unión disjunta de árboles.
- Una hoja en un grafo es un vértice de grado 1.
- Un árbol generador de un grafo G es un subgrafo generador de G que es un árbol.



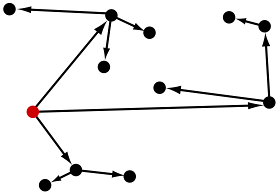
Árboles dirigidos

- Un árbol dirigido es un árbol con un vértice distinguido como raíz y tal que cada arista apunta del vértice más cercano a la raíz al más lejano.
- Si en un árbol dirigido existe la arista ij, se dice que i es el padre de j, o que j es un hijo de i.
- Obs: Todo vértice tiene un solo padre, salvo la raíz que no tiene. Se llaman hojas los vértices sin hijos.
- Se define el nivel de un vértice como su distancia a la raíz.



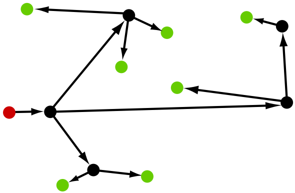
Árboles dirigidos

- Un árbol dirigido es un árbol con un vértice distinguido como raíz y tal que cada arista apunta del vértice más cercano a la raíz al más lejano.
- Si en un árbol dirigido existe la arista ij, se dice que i es el padre de j, o que j es un hijo de i.
- Obs: Todo vértice tiene un solo padre, salvo la raíz que no tiene. Se llaman hojas los vértices sin hijos.
- Se define el nivel de un vértice como su distancia a la raíz.



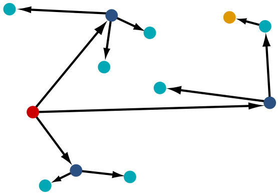
Árboles dirigidos

- Un árbol dirigido es un árbol con un vértice distinguido como raíz y tal que cada arista apunta del vértice más cercano a la raíz al más lejano.
- Si en un árbol dirigido existe la arista ij, se dice que i es el padre de j, o que j es un hijo de i.
- Obs: Todo vértice tiene un solo padre, salvo la raíz que no tiene. Se llaman hojas los vértices sin hijos.
- Se define el nivel de un vértice como su distancia a la raíz.



Árboles dirigidos

- Un árbol dirigido es un árbol con un vértice distinguido como raíz y tal que cada arista apunta del vértice más cercano a la raíz al más lejano.
- Si en un árbol dirigido existe la arista ij, se dice que i es el padre de j, o que j es un hijo de i.
- Obs: Todo vértice tiene un solo padre, salvo la raíz que no tiene. Se llaman hojas los vértices sin hijos.
- Se define el nivel de un vértice como su distancia a la raíz.



Lema 1

Si $m > n - 1$ entonces G tiene un ciclo.

Lema 1

Si $m > n-1$ entonces G tiene un ciclo.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, no puede pasar. Si $n = 3$, entonces G es un triángulo y tiene un ciclo.

Lema 1

Si $m > n - 1$ entonces G tiene un ciclo.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, no puede pasar. Si $n = 3$, entonces G es un triángulo y tiene un ciclo.
Sea G con $n_G > 3$ y $m_G > n_G - 1$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces G tiene un ciclo (ej. práctica).

Lema 1

Si $m > n - 1$ entonces G tiene un ciclo.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, no puede pasar. Si $n = 3$, entonces G es un triángulo y tiene un ciclo.
Sea G con $n_G > 3$ y $m_G > n_G - 1$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces G tiene un ciclo (ej. práctica).
Si no, saco un vértice v con $d(v) \leq 1$. Ahora $G' = G - v$ cumple

$$m_{G'} \geq m_G - 1 > n_G - 2 = n_{G'} - 1$$

Lema 1

Si $m > n - 1$ entonces G tiene un ciclo.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, no puede pasar. Si $n = 3$, entonces G es un triángulo y tiene un ciclo.
Sea G con $n_G > 3$ y $m_G > n_G - 1$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces G tiene un ciclo (ej. práctica).
Si no, saco un vértice v con $d(v) \leq 1$. Ahora $G' = G - v$ cumple

$$m_{G'} \geq m_G - 1 > n_G - 2 = n_{G'} - 1$$

Por hipótesis inductiva G' contiene un ciclo, y como G' es un subgrafo de G, es también un ciclo en G. □

Lema 2

Si G es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Lema 2

Si G es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, se verifica.

Lema 2

Si G es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, se verifica.
Sea G conexo, $n_G \geq 3$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces $2m_G \geq 2n_G$, luego $m \geq n - 1$.

Lema 2

Si G es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, se verifica.
Sea G conexo, $n_G \geq 3$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces $2m_G \geq 2n_G$, luego $m \geq n - 1$.
Si no, sea v de grado 1 (no puede haber vértices de grado cero por ser G conexo no trivial). Como v no puede ser punto de corte, $G' = G - v$ es conexo.

Lema 2

Si G es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, se verifica.
Sea G conexo, $n_G \geq 3$. Si todo vértice de G tiene grado al menos 2, entonces $2m_G \geq 2n_G$, luego $m \geq n - 1$.
Si no, sea v de grado 1 (no puede haber vértices de grado cero por ser G conexo no trivial). Como v no puede ser punto de corte, $G' = G - v$ es conexo.
Por hipótesis inductiva $m_{G'} \geq n_{G'} - 1$. Entonces

$$m_G = m_{G'} + 1 \geq n_{G'} = n_G - 1$$

□

Teorema

Son equivalentes:

1. G es un árbol.
2. Todo par de vértices de G está unido por un único camino.
3. G es conexo y $m = n - 1$.
4. G es acíclico y $m = n - 1$.

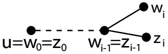
G es un árbol $\Leftrightarrow$ todo par de vértices de G está unido por un único camino

Demo: $\Leftarrow$) Si todo par de vértices de G está unido por un único camino, claramente G es conexo. Además, si hubiera un ciclo, cualquier par de vértices del ciclo estaría unido por al menos dos caminos distintos. Luego G es un árbol.

G es un árbol $\Leftrightarrow$ todo par de vértices de G está unido por un único camino

Demo: $\Leftarrow$) Si todo par de vértices de G está unido por un único camino, claramente G es conexo. Además, si hubiera un ciclo, cualquier par de vértices del ciclo estaría unido por al menos dos caminos distintos. Luego G es un árbol.

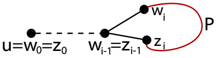
$\Rightarrow$) Si G es un árbol, es conexo, luego todo par de vértices está unido por al menos un camino. Supongamos que u y v están unidos por al menos dos caminos distintos, $P_1 : u = w_0, w_1, \ldots, w_k = v$ y $P_2 : u = z_0, z_1, \ldots, z_r = v$. Sea i el primer índice tal que $w_i \neq z_i$. Entonces $i > 0$, y $w_{i-1} = z_{i-1}$.



G es un árbol $\Leftrightarrow$ todo par de vértices de G está unido por un único camino

Demo: $\Leftarrow$) Si todo par de vértices de G está unido por un único camino, claramente G es conexo. Además, si hubiera un ciclo, cualquier par de vértices del ciclo estaría unido por al menos dos caminos distintos. Luego G es un árbol.

$\Rightarrow$) Si G es un árbol, es conexo, luego todo par de vértices está unido por al menos un camino. Supongamos que u y v están unidos por al menos dos caminos distintos, $P_1 : u = w_0, w_1, \ldots, w_k = v$ y $P_2 : u = z_0, z_1, \ldots, z_r = v$. Sea i el primer índice tal que $w_i \neq z_i$. Entonces $i > 0$, y $w_{i-1} = z_{i-1}$.



Además, $w_i, \ldots, w_k = v = z_r, \ldots, z_i$ inducen en G un subgrafo conexo. Sea P un camino mínimo entre w_i y z_i en ese subgrafo inducido. Entonces $w_{i-1}Pw_{i-1}$ es un ciclo en G, absurdo. $\square$

G es un árbol $\Leftrightarrow$ G es conexo y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es conexo y por Lema 2, $n \geq m - 1$. Además, como es acíclico, por Lema 1, $n \leq m - 1$. Luego $n = m - 1$.

G es un árbol $\Leftrightarrow$ G es conexo y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es conexo y por Lema 2, $n \geq m - 1$. Además, como es acíclico, por Lema 1, $n \leq m - 1$. Luego $n = m - 1$.

$\Leftarrow$) G es conexo, probemos por inducción que es un árbol. Si $n = 1$, vale. Supongamos $n > 1$. Por propiedad de la suma de grados, G tiene al menos un vértice v de grado menor o igual que uno. Como es conexo, v tiene grado 1, y entonces no es punto de corte. Luego $G' = G - v$ es conexo y

$$n_{G'} - 1 = n_G - 2 = m_G - 1 = m_{G'}.$$

Por hipótesis inductiva G' es un árbol, y entonces G era un árbol también (v tiene grado 1, no puede pertenecer a un ciclo). $\square$

G es un árbol $\Leftrightarrow$ G es acíclico y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es acíclico y por Lema 1, $m \leq n - 1$. Además, como es conexo, por Lema 2, $m \geq n - 1$. Luego $m = n - 1$.

G es un árbol $\Leftrightarrow$ G es acíclico y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es acíclico y por Lema 1, $m \leq n - 1$. Además, como es conexo, por Lema 2, $m \geq n - 1$. Luego $m = n - 1$.

$\Leftarrow$) G es acíclico. Supongamos que tiene t componentes conexas $G_1, \ldots, G_t$. Cada una de ellas es un árbol, y por la equivalencia anterior, $m_{G_i} = n_{G_i} - 1$. Pero entonces

$$m_G = \sum_{i=1}^{t} m_{G_i} = \sum_{i=1}^{t} (n_{G_i} - 1) = \sum_{i=1}^{t} n_{G_i} - t = n_G - t.$$

Luego $t = 1$, por lo tanto G es conexo. $\square$

Teorema

Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Teorema

Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Demo: Si T es un árbol no trivial, por ser conexo tiene una arista $v_0 w_0$. O v_0 es una hoja, o puedo elegir un vecino v_1 de v_0, tal que $v_1 \neq w_0$. En cada paso, o v_i es una hoja o tiene un vecino distinto de v_{i-1} y también distinto del resto de los vértices del camino, porque T es acíclico. Como los vértices son finitos, hay algún v_k que es una hoja. Con el mismo argumento a partir de w_0, hay algún w_t que es una hoja, y es distinto de todos los v_i. $\square$

Teorema

1. Toda arista de un árbol es un puente.
2. Un vértice de un árbol no trivial es un punto de corte sii no es una hoja.

Teorema

1. Toda arista de un árbol es un puente.
2. Un vértice de un árbol no trivial es un punto de corte sii no es una hoja.

Demo: 1. Sea T un árbol y vw una arista de T. Como en T hay un único camino entre v y w (es v-e-w), no existe camino que una v y w en $T - e$.

Teorema

1. Toda arista de un árbol es un puente.
2. Un vértice de un árbol no trivial es un punto de corte sii no es una hoja.

Demo: 1. Sea T un árbol y vw una arista de T. Como en T hay un único camino entre v y w (es v-e-w), no existe camino que una v y w en $T - e$.

2. En cualquier grafo, una hoja nunca puede ser punto de corte. Sea T un árbol no trivial y v vértice de T que no es hoja. Entonces tiene al menos dos vecinos, z y w. Como en T existe un único camino que une a z y w (es zvw), no existe camino entre z y w en $T - v$. □

Teorema

Un grafo es conexo sii admite un árbol generador.

Teorema

Un grafo es conexo sii admite un árbol generador.

Idea de demo: $\Leftarrow$) Sea T un a.g. de G. Sean v, w vértices de G. En T existe un camino de v a w. Como T es subgrafo de G, en particular es un camino en G de v a w. Por lo tanto G es conexo.

Teorema

Un grafo es conexo sii admite un árbol generador.

Idea de demo: $\Leftarrow$) Sea T un a.g. de G. Sean v, w vértices de G. En T existe un camino de v a w. Como T es subgrafo de G, en particular es un camino en G de v a w. Por lo tanto G es conexo.

$\Leftarrow$) Por inducción. Si G es trivial, G es un a.g. de si mismo. Si no, sea v un vértice de G. Por hipótesis inductiva, cada componente conexa G_i de $G - v$ tiene un a.g. T_i. Como G era conexo, v tiene un vecino v_i en cada G_i. Sea T el grafo obtenido agregando a la unión de los T_i el vértice v y las aristas $v_i v$. T es un a.g. de G: es fácil ver que es conexo y que $m_T = n_T - 1$, sabiendo que los T_i son conexos y $m_{T_i} = n_{T_i} - 1$. $\square$

Corolario

Todo grafo conexo no trivial tiene al menos dos vértices tales que al sacar alguno de ellos, sigue siendo conexo.

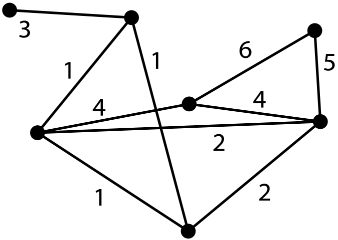
Corolario

Todo grafo conexo no trivial tiene al menos dos vértices tales que al sacar alguno de ellos, sigue siendo conexo.

Idea de demo: Si G es conexo, tiene un árbol generador T. Como G es no trivial, T también, y por lo tanto tiene al menos dos hojas v, w. Como $T - v$ y $T - w$ siguen siendo árboles, son árboles generadores de $G - v$ y $G - w$, respectivamente. Luego $G - v$ y $G - w$ son conexos. $\square$

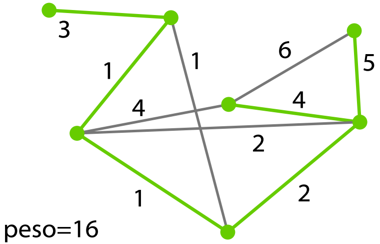
Árbol generador mínimo

- Un grafo pesado es un grafo tal que sus aristas tienen asociado un peso.
- El peso de un subgrafo es la suma de los pesos de sus aristas.
- Un árbol generador mínimo en un grafo pesado es un árbol generador de peso mínimo.



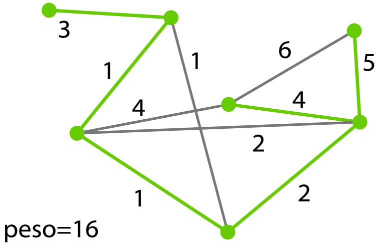
Árbol generador mínimo

- Un grafo pesado es un grafo tal que sus aristas tienen asociado un peso.
- El peso de un subgrafo es la suma de los pesos de sus aristas.
- Un árbol generador mínimo en un grafo pesado es un árbol generador de peso mínimo.



Árbol generador mínimo

- Un grafo pesado es un grafo tal que sus aristas tienen asociado un peso.
- El peso de un subgrafo es la suma de los pesos de sus aristas.
- Un árbol generador mínimo en un grafo pesado es un árbol generador de peso mínimo.



Ejemplo de aplicación

Tengo que construir caminos entre ciertos pares de ciudades, de modo que todo el país me quede conectado. ¿Cómo puedo hacerlo minimizando la longitud total de camino construido?

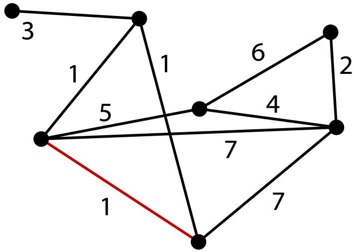
Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

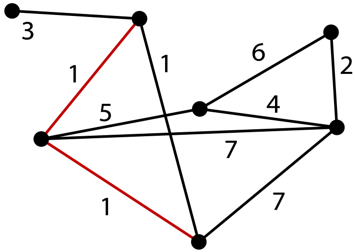
Ej:



Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

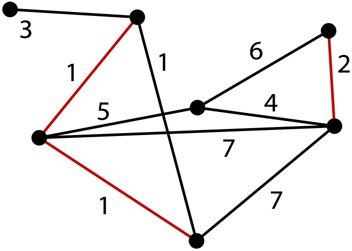
Ej:



Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

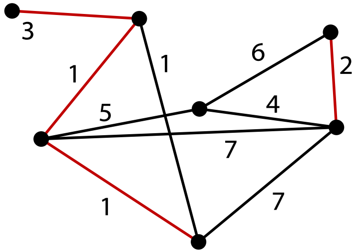
Ej:



Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

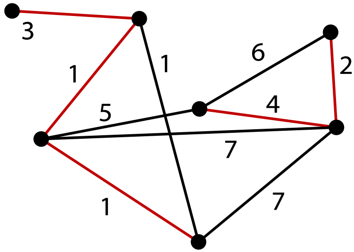
Ej:



Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

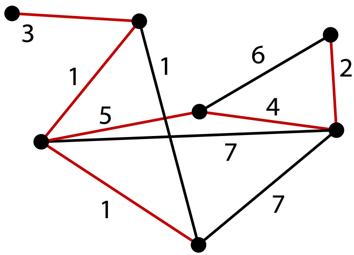
Ej:



Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

Ej:



Demostración de que Kruskal construye un AGM

Para ver que el algoritmo construye un árbol generador, como en cada paso el subgrafo B elegido hasta el momento es generador y acíclico, basta ver que el algoritmo termina con $m_B = n_G - 1$. Si $m_B < n_G - 1$, B es no conexo. Sea B_1 una componente conexa de B. Como G es conexo, va a existir alguna arista con un extremo en B_1 y el otro en $V(G) - B_1$, que por lo tanto no forma ciclo con las demás aristas de B. Entonces, si $m_B < n_G - 1$, el algoritmo puede realizar un paso más.

Sea G un grafo, T_K el árbol generado por el algoritmo de Kruskal y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de T_K en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Kruskal. Para cada árbol generador T de G definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j < k$, $e_j \in T$.

Demostración de que Kruskal construye un AGM

Para ver que el algoritmo construye un árbol generador, como en cada paso el subgrafo B elegido hasta el momento es generador y acíclico, basta ver que el algoritmo termina con $m_B = n_G - 1$. Si $m_B < n_G - 1$, B es no conexo. Sea B_1 una componente conexa de B. Como G es conexo, va a existir alguna arista con un extremo en B_1 y el otro en $V(G) - B_1$, que por lo tanto no forma ciclo con las demás aristas de B. Entonces, si $m_B < n_G - 1$, el algoritmo puede realizar un paso más.

Sea G un grafo, T_K el árbol generado por el algoritmo de Kruskal y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de T_K en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Kruskal. Para cada árbol generador T de G definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j < k$, $e_j \in T$.

Demostración de que Kruskal construye un AGM

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con T_K, con lo cual T_K resulta ser mínimo. Si T_K no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Como T_K es acíclico, hay alguna arista e en C tal que $e \notin T_K$. Como $e_1, \ldots, e_{p(T)-1} \in T$ y T es acíclico, e no forma ciclos con $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$. Por la forma en que fue elegida $e_{p(T)}$ por el algoritmo de Kruskal, $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$.

Pero entonces $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.

Luego T_K es un árbol generador mínimo. $\square$

Demostración de que Kruskal construye un AGM

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con T_K, con lo cual T_K resulta ser mínimo. Si T_K no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \not\in T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Como T_K es acíclico, hay alguna arista e en C tal que $e \not\in T_K$. Como $e_1, \ldots, e_{p(T)-1} \in T$ y T es acíclico, e no forma ciclos con $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$. Por la forma en que fue elegida $e_{p(T)}$ por el algoritmo de Kruskal, $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$.

Pero entonces $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.

Luego T_K es un árbol generador mínimo. $\square$

Demostración de que Kruskal construye un AGM

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con T_K, con lo cual T_K resulta ser mínimo. Si T_K no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Como T_K es acíclico, hay alguna arista e en C tal que $e \notin T_K$. Como $e_1, \ldots, e_{p(T)-1} \in T$ y T es acíclico, e no forma ciclos con $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$. Por la forma en que fue elegida $e_{p(T)}$ por el algoritmo de Kruskal, $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$.

Pero entonces $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.

Luego T_K es un árbol generador mínimo. $\square$

Demostración de que Kruskal construye un AGM

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con T_K, con lo cual T_K resulta ser mínimo. Si T_K no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Como T_K es acíclico, hay alguna arista e en C tal que $e \notin T_K$. Como $e_1, \dots, e_{p(T)-1} \in T$ y T es acíclico, e no forma ciclos con $e_1, \dots, e_{p(T)-1}$. Por la forma en que fue elegida $e_{p(T)}$ por el algoritmo de Kruskal, $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$.

Pero entonces $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.

Luego T_K es un árbol generador mínimo. $\square$

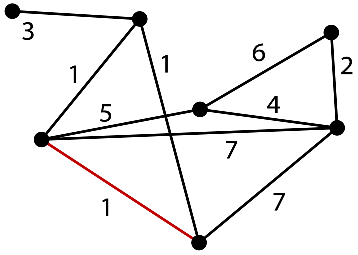
Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

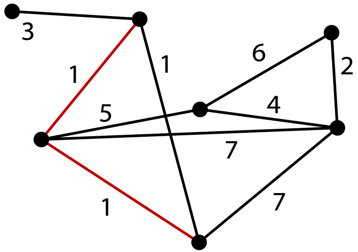
Ej:



Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

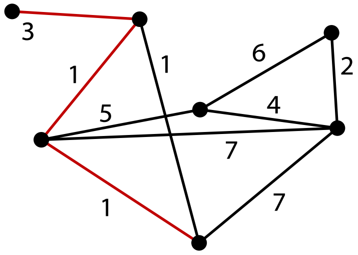
Ej:



Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

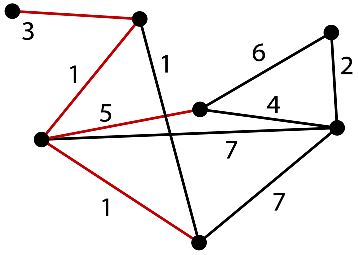
Ej:



Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

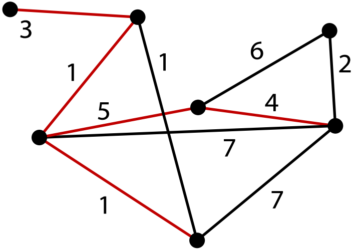
Ej:



Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

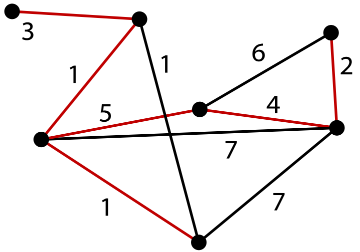
Ej:



Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde e es una arista de peso mínimo en G y v y w son sus extremos. En cada paso, agregar a A una arista f de peso mínimo con un extremo en W y el otro en $V(G) - W$. Agregar a W el extremo de f que no estaba en W, hasta que $W = V(G)$.

Ej:



Demostración de que Prim construye un AGM

Para ver que construye un árbol generador, se puede ver que en cada paso del algoritmo, el subgrafo elegido hasta el momento es conexo y con $m = n - 1$. Finalmente, como el grafo es conexo, mientras $W \neq V(G)$ va a existir alguna arista de W a $V(G) - W$ con lo cual el algoritmo termina construyendo un árbol generador del grafo.

Sea G un grafo, P el árbol generado por el algoritmo de Prim y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de P en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Prim. Para cada árbol generador T de G definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j \leq k$, $e_j \in T$.

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con P, con lo cual P resulta ser mínimo. Si P no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Demostración de que Prim construye un AGM

Para ver que construye un árbol generador, se puede ver que en cada paso del algoritmo, el subgrafo elegido hasta el momento es conexo y con $m = n - 1$. Finalmente, como el grafo es conexo, mientras $W \neq V(G)$ va a existir alguna arista de W a $V(G) - W$ con lo cual el algoritmo termina construyendo un árbol generador del grafo.

Sea G un grafo, P el árbol generado por el algoritmo de Prim y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de P en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Prim. Para cada árbol generador T de G definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j \leq k$, $e_j \in T$.

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con P, con lo cual P resulta ser mínimo. Si P no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Demostración de que Prim construye un AGM

Para ver que construye un árbol generador, se puede ver que en cada paso del algoritmo, el subgrafo elegido hasta el momento es conexo y con $m = n - 1$. Finalmente, como el grafo es conexo, mientras $W \neq V(G)$ va a existir alguna arista de W a $V(G) - W$ con lo cual el algoritmo termina construyendo un árbol generador del grafo.

Sea G un grafo, P el árbol generado por el algoritmo de Prim y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de P en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Prim. Para cada árbol generador T de G definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j \leq k$, $e_j \in T$.

Ahora, sea T un AGM que maximiza p. Si $p(T) = n$, entonces T coincide con P, con lo cual P resulta ser mínimo. Si P no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como T es conexo, en T hay un camino C que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Demostración de que Prim construye un AGM

- Si $p(T) = 1$, como e_1 es de peso mínimo, $peso(e_1) \leq peso(e)$ $\forall e \in C$. Luego $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.
- Si $p(T) > 1$, sea V_1 el conjunto de extremos de las aristas $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$ y $V_2 = V - V_1$. Por la forma de elegir las aristas en Prim, $e_{p(T)}$ es de peso mínimo entre las que tienen un extremo en V_1 y otro en V_2. El camino C va de un vértice de V_1 a un vértice de V_2, con lo cual, existe $e \in C$ con un extremo en V_1 y otro en V_2 (sus vértices se pueden partir entre los de V_1 y los de V_2, ambos conjuntos son no vacíos y C es conexo). Entonces $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$ y $T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de peso menor o igual a T y p mayor a $p(T)$ (e no es ninguna de las e_i con $i < p(T)$ porque esas tienen ambos extremos en V_1, por definición de V_1), absurdo.

Luego P es un árbol generador mínimo. $\square$

Demostración de que Prim construye un AGM

- Si $p(T) = 1$, como e_1 es de peso mínimo, $peso(e_1) \leq peso(e)$ $\forall e \in C$. Luego $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.
- Si $p(T) > 1$, sea V_1 el conjunto de extremos de las aristas $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$ y $V_2 = V - V_1$. Por la forma de elegir las aristas en Prim, $e_{p(T)}$ es de peso mínimo entre las que tienen un extremo en V_1 y otro en V_2. El camino C va de un vértice de V_1 a un vértice de V_2, con lo cual, existe $e \in C$ con un extremo en V_1 y otro en V_2 (sus vértices se pueden partir entre los de V_1 y los de V_2, ambos conjuntos son no vacíos y C es conexo). Entonces $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$ y $T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de peso menor o igual a T y p mayor a $p(T)$ (e no es ninguna de las e_i con $i < p(T)$ porque esas tienen ambos extremos en V_1, por definición de V_1), absurdo.

Luego P es un árbol generador mínimo. $\square$

Demostración de que Prim construye un AGM

- Si $p(T) = 1$, como e_1 es de peso mínimo, $peso(e_1) \leq peso(e)$ $\forall e \in C$. Luego $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de G de peso menor o igual a T y $p(T') > p(T)$, absurdo.
- Si $p(T) > 1$, sea V_1 el conjunto de extremos de las aristas $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$ y $V_2 = V - V_1$. Por la forma de elegir las aristas en Prim, $e_{p(T)}$ es de peso mínimo entre las que tienen un extremo en V_1 y otro en V_2. El camino C va de un vértice de V_1 a un vértice de V_2, con lo cual, existe $e \in C$ con un extremo en V_1 y otro en V_2 (sus vértices se pueden partir entre los de V_1 y los de V_2, ambos conjuntos son no vacíos y C es conexo). Entonces $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$ y $T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de peso menor o igual a T y p mayor a $p(T)$ (e no es ninguna de las e_i con $i < p(T)$ porque esas tienen ambos extremos en V_1, por definición de V_1), absurdo.

Luego P es un árbol generador mínimo. $\square$