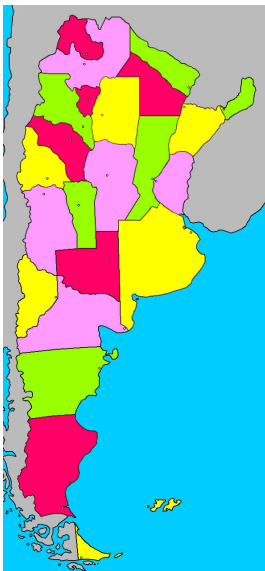


## Pintando mapas...



# La Conjetura de los Cuatro Colores

La Conjetura de los Cuatro Colores fue enunciada en el siglo XIX:

**Todo mapa puede ser coloreado usando a lo sumo cuatro colores de manera tal que regiones limítrofes (i.e. que comparten una frontera de dimensión uno, no sólo un punto) reciban colores diferentes.**

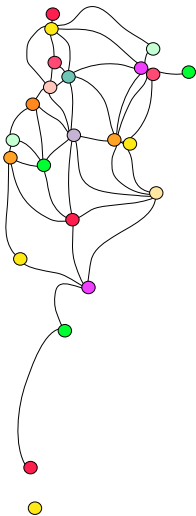
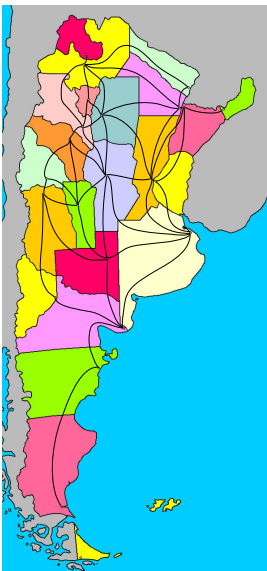
## En términos de grafos...

A partir de cualquier mapa podemos construir un grafo donde las regiones se representan por vértices y dos vértices son adyacentes si y sólo si las regiones correspondientes son limítrofes.

El grafo resultante es **planar**, es decir, se puede dibujar en el plano sin aristas que se crucen.

Entonces, la Conjetura de los Cuatro Colores dice que los vértices de un grafo planar pueden ser coloreados usando a lo sumo 4 colores y de manera tal que no haya dos vértices adyacentes que reciban el mismo color.

## Ejemplo...



# Historia

Aparentemente, la Conjetura de los Cuatro Colores fue formulada por primera vez por Francis Guthrie. Él era un estudiante del University College de Londres y fue alumno de Augusts De Morgan.

Después de graduarse en Londres estudió derecho, pero algunos años después su hermano Frederick Guthrie comenzó a estudiar con De Morgan. Francis le mostró a su hermano algunos resultados que había estado intentando probar sobre coloreo de mapas y le pidió que le pregunte a De Morgan sobre ese problema.



Guthrie



De Morgan

De Morgan no pudo darle una respuesta pero ese mismo día (el 23 de octubre de 1852) le escribió una carta a Sir William Hamilton en Dublin:

A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored so that figures with any portion of common boundary line are differently colored - *four colors may be wanted, but not more* - the following is the case in which four colors are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented. ... If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did...

Hamilton le respondió el 26 de octubre de 1852 (mostrando tanto su eficiencia como la del correo):

*I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.*



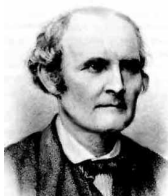
Hamilton

La primera referencia publicada se encuentra en el paper de Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259–261, 1879.

El 17 de julio de 1879 Alfred Bray Kempe anunció en *Nature* que tenía una demostración de la Conjetura de los Cuatro Colores.

Kempe era un abogado de Londres que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge y dedicado algo de su tiempo a la matemática durante su vida.

Por sugerencia de Cayley, Kempe envió su Teorema al *American Journal of Mathematics* donde fue publicado a fines de 1879.



Cayley



Kempe

## Idea de la demostración de Kempe

Kempe usó un argumento inductivo-constructivo:

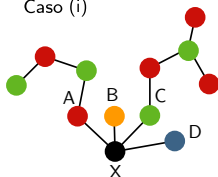
Si tenemos un mapa en el cual cada región es coloreada con rojo, verde, azul o amarillo excepto una, digamos X. Si X no está rodeada por regiones de todos los colores, me queda un color para asignarle a X. Supongamos entonces que X tiene regiones limítrofes de los 4 colores.

Si X está rodeada por regiones A, B, C, D en orden, coloreadas rojo, amarillo, verde y azul entonces hay dos casos a considerar.

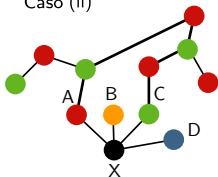
- (i) No existe una cadena de regiones adyacentes uniendo A y C, coloreadas alternadamente de rojo y verde.
- (ii) Existe una cadena de regiones adyacentes uniendo A y C, coloreadas alternadamente de rojo y verde.



Caso (i)



Caso (ii)



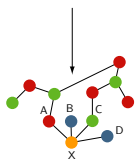
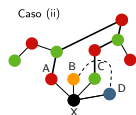
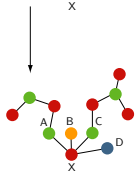
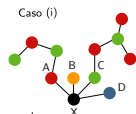


## Casos:

- (i) No existe una cadena roja/verde uniendo A y C.
- (ii) Existe una cadena roja/verde uniendo A y C.

Si vale (i), entonces cambiamos A a verde, y luego intercambiamos los colores rojo/verde en la componente bicromática rojo/verde que contiene a A. Como C no está en la componente, permanece verde y ahora no hay más regiones rojas adyacentes a X. Coloreamos X con rojo.

Si vale (ii), entonces no puede haber una cadena amarilla/azul de regiones adyacentes uniendo B y D. [No podría cruzar la cadena verde/roja.] Entonces la propiedad (i) vale para B y D y cambiamos los colores como antes.



El Teorema de los Cuatro Colores volvió a ser Conjetura de los Cuatro Colores en 1890.

Percy John Heawood, un docente en Durham England, publicó un paper llamado *Map coloring theorem*. Ahí decía que su objetivo era “...*más destructivo que constructivo, ya que voy a mostrar un defecto en la aparentemente reconocida prueba...*”.

Aunque Heawood mostró que la prueba de Kempe era errónea, él probó en ese paper que todo mapa puede ser coloreado usando a lo sumo 5 colores.

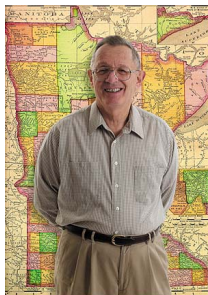


Heawood

# Primera prueba

Finalmente, en 1976 (sí, 100 años después...) la Conjetura de los Cuatro Colores fue probada por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en la Universidad de Illinois. John Koch colaboró con partes del algoritmo.

- K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable. Part I. Discharging*, Illinois J. Math. 21 (1977), 429–490.
- K. Appel, W. Haken and J. Koch, *Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility*, Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.



Appel

## Idea de la demostración

Para demostrar la inexistencia de un contraejemplo (y en particular de un contraejemplo minimal), Appel y Haken redujeron mediante argumentos teóricos el problema de los infinitos mapas posibles a 1,936 configuraciones que debieron ser chequeadas una a una por computadora, con un algoritmo que corrió cientos de horas.

La parte teórica a su vez incluye 500 páginas de contra-contra-ejemplos escritos a mano (esos coloreos fueron verificados por el hijo de Haken!).

Pero muchos científicos cuestionaron la demostración de Appel-Haken por dos motivos:

- Parte de la prueba usaba una computadora, y no podía ser verificada a mano.
- Aún la parte supuestamente chequeable a mano es extremadamente engorrosa, y nadie la verificó por completo.

## Segunda prueba

Hace diez años apareció otra prueba:

- N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *The four color theorem*, J. Combin. Theory Ser. B. 70 (1997), 2–44.
- N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *A new proof of the four color theorem*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996), 17–25 (electronic).



Robertson



Sanders



Seymour



Thomas

## Esquema de la demostración

La idea básica de la prueba es la misma que la de Appel y Haken. Los autores exhibieron un conjunto de 633 configuraciones reducibles, es decir, configuraciones que no pueden aparecer en un contraejemplo minimal. Usaron también un resultado conocido desde 1913 sobre la estructura que debería tener un tal contraejemplo.

En la segunda parte de la demostración, probaron que todo grafo con dicha estructura contiene alguna de las 633 configuraciones reducibles, y por lo tanto no existe tal contraejemplo.

La primera parte de la prueba requiere de una computadora, pero la segunda puede ser chequeada a mano en pocos meses o, usando una computadora, en unos 20 minutos.

En diciembre de 2004 en una reunión científica en Francia, un grupo de gente de Microsoft Research en Inglaterra e INRIA en Francia anunciaron la verificación de la demostración de Robertson et al. formulando el problema en el lenguaje Coq y confirmando la validez de cada uno de sus pasos (Devlin 2005, Knight 2005).

De todas formas, no se conoce hasta el momento una demostración del Teorema de los Cuatro Colores al estilo tradicional (completamente verificable por humanos con lápiz y papel).



## Coloreo de grafos

- Un  $k$ -coloreo de un grafo  $G$  es una asignación de colores a sus vértices de manera que no se usan más de  $k$  colores y no hay dos vértices adyacentes que reciban el mismo color.
- Un grafo se dice  $k$ -coloreable si admite un  $k$ -coloreo.



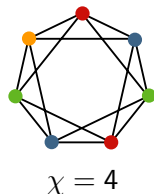
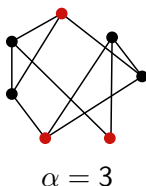
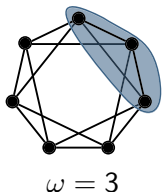
4-coloreo



3-coloreo

# Número cromático

- Una **clique** en un grafo es un subgrafo completo maximal. Se denota por  $\omega(G)$  el tamaño de una clique máxima.
- Un **conjunto independiente** es un conjunto de vértices no adyacentes dos a dos. Se denota por  $\alpha(G)$  el tamaño de un conjunto independiente máximo.
- El **número cromático** de un grafo  $G$  es el menor número  $k$  tal que  $G$  es  $k$ -coloreable, y se denota por  $\chi(G)$ .



# Aplicaciones

El problema de coloreo de grafos y sus variantes tienen muchas aplicaciones, entre ellas problemas de scheduling, asignación de frecuencias en radios y teléfonos celulares, etc.

## Ejemplo: Planificación de exámenes

Cada alumno tiene que rendir un examen en cada una de las materias que está cursando. Sea  $X$  el conjunto de materias e  $Y$  el conjunto de estudiantes. Como el examen es escrito, es conveniente que todos los alumnos lo rindan a la vez. Por resolución del CD, los alumnos tienen derecho a no rendir dos exámenes el mismo día. ¿Cuál es la mínima cantidad de días de examen necesarios?

## Ejemplo: Planificación de exámenes

Modelemos este problema como un problema de coloreo de grafos.

- Vértices: materias.
- Colores: días.
- Aristas: Dos vértices son adyacentes si sus correspondientes materias tienen alumnos en común.
- Correspondencia con el modelo: Dos **materias** [vértices] no pueden **tomar examen el mismo día** [usar el mismo color] si **hay alumnos que cursan ambas** [son adyacentes].

# Algunas propiedades de $\chi(G)$ , $\omega(G)$ y $\alpha(G)$

## Lema

Sea  $G$  un grafo de  $n$  vértices y  $\overline{G}$  su complemento. Entonces:

1.  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$
2.  $\chi(G) \geq \omega(G)$
3.  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
4.  $\chi(G)\alpha(G) \geq n$
5.  $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$
6.  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

## Demostraciones:

1.  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

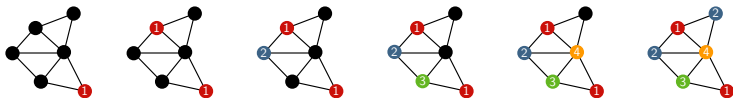
Por definición, ya que los conjuntos independientes maximales de  $G$  son cliques de  $\overline{G}$ . □

2.  $\chi(G) \geq \omega(G)$

Los vértices de una clique tienen que usar colores distintos, ya que son adyacentes dos a dos. □

3.  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Pintando secuencialmente los vértices con el mínimo color no utilizado por un vecino ya pintado, obtenemos un coloreo válido (no siempre óptimo) con a lo sumo  $\Delta(G) + 1$  colores. □



Ej: El coloreo obtenido usa 4 colores,  $\Delta(G) + 1 = 6$  y  $\chi(G) = 3$ .

## Demostraciones:

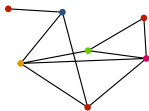
4.  $\chi(G)\alpha(G) \geq n$

Tomemos un coloreo óptimo de  $G$ , y llamemos  $V_i$  al conjunto de vértices coloreados con  $i$ , para  $i = 1, \dots, \chi(G)$ . Como cada  $V_i$  es un conjunto independiente,  $|V_i| \leq \alpha(G)$ .

Entonces  $n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G)\alpha(G)$ . □

5.  $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$

Sea  $W$  un conjunto independiente máximo de  $G$ . Si pintamos los vértices de  $W$  de un color y los de  $V - W$  de otros colores diferentes entre si, obtenemos un coloreo válido de  $G$  con  $1 + n - \alpha(G)$  colores. Luego  $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ . □



Ej:  $\alpha(G) = 3$ , el coloreo obtenido usa  $n + 1 - \alpha(G) = 5$  colores, y  $\chi(G) = 3$ .

## Demostraciones:

$$6. \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

Por inducción. Si  $G$  es trivial,  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = 1 + 1 = n + 1$ .

Si  $n \geq 2$ , sea  $v \in V(G)$ . Tenemos dos casos para  $G - v$ :

$$(1) \chi(G - v) = \chi(G)$$

$$(2) \chi(G - v) = \chi(G) - 1.$$

Y dos casos para  $\overline{G - v} = \overline{G} - v$ :

$$(a) \chi(\overline{G - v}) = \chi(\overline{G})$$

$$(b) \chi(\overline{G - v}) = \chi(\overline{G}) - 1.$$

Por hipótesis inductiva,  $\chi(G - v) + \chi(\overline{G - v}) \leq (n - 1) + 1$ , luego la propiedad para  $G$  vale en los casos 1a, 1b y 2a. Supongamos que se da el caso 2b. Si  $d_G(v) < \chi(G - v)$  entonces  $\chi(G) = \chi(G - v)$ .

Luego  $d_G(v) \geq \chi(G - v) = \chi(G) - 1$ . Análogamente,  $d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(\overline{G}) - 1$ .

Por lo tanto,  $n - 1 = d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(G) - 1 + \chi(\overline{G}) - 1$ , entonces  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ . □



# Teorema de Brooks

## Teorema de Brooks (1941)

Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces  $G$  es  $\Delta(G)$ -coloreable, salvo que:

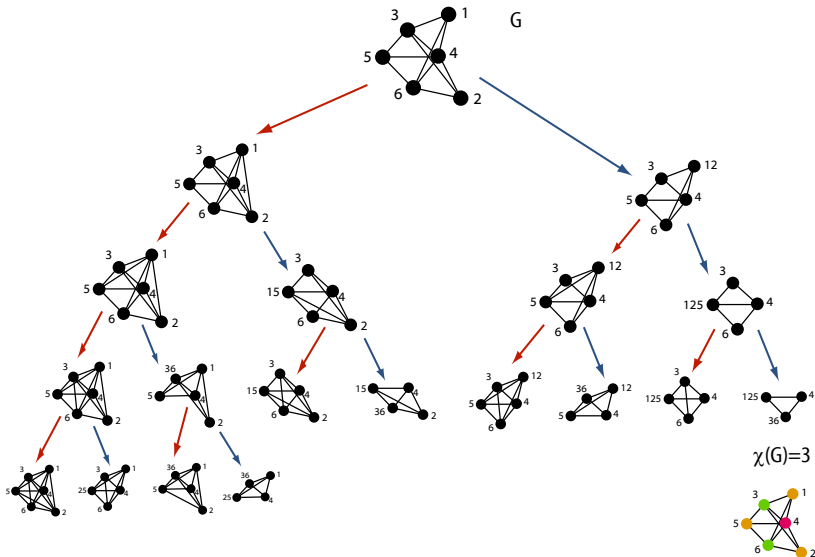
1.  $\Delta(G) \neq 2$ , y  $G$  es un completo de tamaño  $\Delta(G) + 1$ , or
2.  $\Delta(G) = 2$ , y  $G$  es un ciclo impar.

## Algoritmo para coloreo de grafos

No se conoce un algoritmo **polinomial** para encontrar  $\chi(G)$ .  
Veamos el siguiente algoritmo (conexión-contracción):

- Consideremos un grafo  $G$  con dos vértices no adyacentes  $a$  y  $b$ . La conexión  $G_1$  se obtiene agregando la arista  $ab$ . La contracción  $G_2$  se obtiene contrayendo  $\{a, b\}$  en un solo vértice  $c(a, b)$  que es vecino de  $N(a) \cup N(b)$ .
- Un coloreo de  $G$  en el cual  $a$  y  $b$  usan distintos colores es un coloreo de  $G_1$ , y viceversa. Un coloreo de  $G$  en el cual  $a$  y  $b$  usan el mismo color da lugar a un coloreo de  $G_2$ , y viceversa.
- Entonces,  $\chi(G) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .
- Si repetimos las operaciones en cada grafo generado hasta que los grafos resultantes sean completos,  $\chi(G)$  es el tamaño del menor completo obtenido.

## Ejemplo



# Polinomio cromático

El **polinomio cromático** de un grafo  $G$  es una función  $P_G(k)$  que para cada entero  $k$  da el número posible de  $k$ -coloreos de  $G$ .

- ¿Por qué esa función es un polinomio?
- **Ejemplo 1:** Si  $G$  es un árbol de  $n$  vértices, entonces:

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$$

- **Ejemplo 2:** Si  $G$  es  $K_n$ , entonces:

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

# Polinomio cromático

## Propiedad

$P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$ , donde  $G_1$  y  $G_2$  son los grafos definidos en el algoritmo de conexión-contracción.

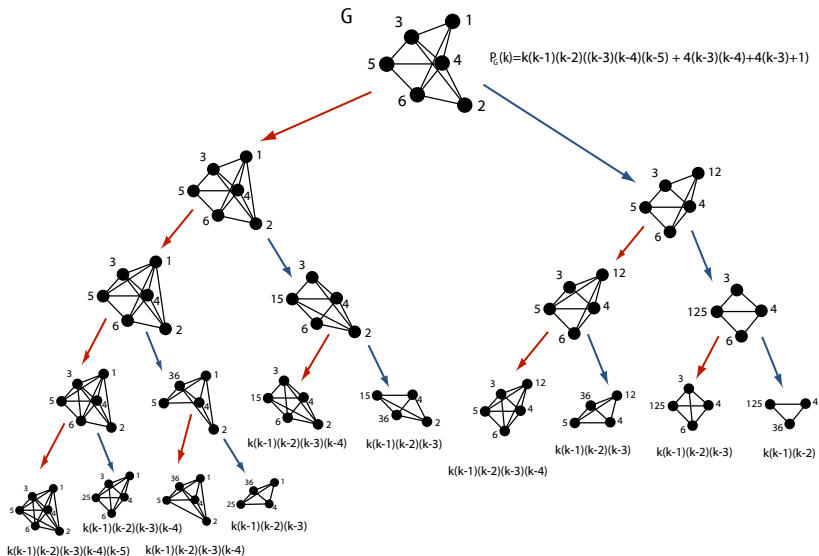
## Corolario

$P_G(k)$  es un polinomio.

**Ejercicio:** Probar que el polinomio cromático de un ciclo  $C_n$  es

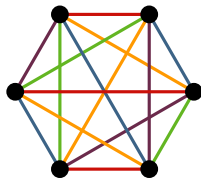
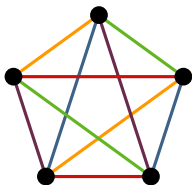
$$P_{C_n}(k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1)$$

## Ejemplo



# Índice cromático

- El **índice cromático**  $\chi'(G)$  de un grafo  $G$  es el menos número de colores necesarios para pintar las aristas de  $G$  de manera tal que dos aristas incidentes no tengan el mismo color.
- Claramente,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .



# Índice cromático

## Propiedad

- $\chi'(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$ , si  $n$  es par
- $\chi'(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$ , si  $n$  es impar

**Demo:** A lo sumo  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  aristas pueden usar el mismo color, por lo tanto  $\chi'(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq m$ . Como  $m_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$ , para  $n$  impar  $\chi'(K_n) \geq n$  y para  $n$  par  $\chi'(K_n) \geq n - 1$ .

Vamos a construir coloreos con esa cantidad de colores respectivamente. Para  $n$  impar, dibujamos los vértices formando un polígono regular, pintamos un lado de cada color y cada diagonal del color de su lado paralelo. Para  $n$  par, sacamos un vértice  $v$  y pintamos el grafo  $K_{n-1}$ . En el coloreo resultante, cada vértice  $w$  es incidente a aristas de todos los colores salvo el color de su lado opuesto, y ese color se asigna a la arista  $vw$  (en el dibujo anterior,  $v$  es el vértice superior derecho). □



# Índice cromático

## Teorema de Vizing (1964)

Sea  $G$  un grafo, entonces

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$