Introducción a la teoría de grafos
Práctica 0: Inducción

Ejercicios

1. Probar por inducción:

   a. $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2, \forall n \geq 1$
   b. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2, \forall n \geq 0$
   c. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \forall n \geq 1$
   d. $-1 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n n(n+1)/2, \forall n \geq 1$
   e. $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3, \forall n \geq 1$
   f. $1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1$

2. Encontrar una fórmula para la siguiente suma y demostrarla por inducción: $1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n$.

3. La población de una colonia de hormigas se duplica todos los años. Si se establece una colonia inicial de 10 hormigas, ¿cuántas hormigas habrá después de n años?

4. Probar por inducción que para $n \geq 5$ se verifica que $2^n > n^2$.

5. La población de gatos en un depósito tiene la propiedad de que el número de gatos en un año es igual a la suma de la cantidad de gatos de los dos años anteriores. Si en el primer año había un solo gato, y en el segundo dos (¡suponiendo ello posible!), probar que el número de gatos en el año n es:

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

6. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

   Se quiere probar que los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, de un conjunto son iguales entre sí.

   i. Paso inicial, $(n = 1)$, el conjunto tiene un sólo elemento x_1 que es igual a si mismo.
   ii. Paso inductivo. Supongamos que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$. Como también vale la hipótesis inductiva para un conjunto de dos elementos, tenemos que $x_{n-1} = x_n$ y por tanto resulta que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$.

7. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

   Se quiere probar que $\forall a \neq 0$ vale que $a^n = 1$.

   i. Paso inicial: $(n = 0), a^n = 1\ \forall a$.
   ii. Paso inductivo: supongamos que $a^{n-1} = 1$.
   Entonces, $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$.