Introducción a la teoría de grafos
Práctica 1: Definiciones y propiedades básicas

Contenidos

1. Grafos y digrafos. Definiciones básicas: caminos, circuitos, conexión, etc. Operaciones sobre grafos y sus propiedades. Isomorfismo de grafos.

2. Árboles: definición, propiedades y caracterizaciones. Grafos eulerianos y hamiltonianos.

3. Representación de un grafo en una computadora. Matrices de adyacencia e incidencia. Algoritmos de búsqueda en grafos: BFS y DFS. Resolución de problemas de conexión y visibilidad. Generación de órdenes topológicos.

Ejercicios

1. Dibujar todos los grafos de cinco vértices no isomorfos entre sí.

2. Probar que si $\delta(G) \geq 2$, entonces G contiene un circuito.

3. Probar que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y sólo si para cualquier partición de V en subconjuntos V_1 y V_2, existe una arista uniendo algún vértice de V_1 con algún vértice de V_2.

4. Probar que en un grafo conexo dos caminos de longitud máxima siempre tienen un vértice en común.

5. * ¿Es cierto que en un grafo conexo todos los caminos de longitud máxima tienen un vértice en común?

6. Sea G un grafo no conexo. Probar que $\bar{G}$ es conexo.

7. Probar que si G tiene n vértices y $\delta(G) \geq (n-1)/2$, entonces G es conexo. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

8. Sea G un grafo tal que G es isomorfo a $\bar{G}$. Probar que G tiene $4k$ o $4k+1$ vértices, para algún $k \in \mathbf{N}$.

9. Construir un grafo cúbico con $2k$ vértices ($k \geq 2$) que no tenga triángulos.

10. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) G es un bosque.
    (ii) Cada arista de G es un puente.
    (iii) Cada componente biconexa de G es isomorfa a K_2.
    (iv) Cada intersección no vacía de dos subgrafos conexos de G es conexa.

11. Probar que todo grafo conexo tiene un árbol generador.

12. Probar que todo árbol es un grafo bipartito.

13. Probar que todo árbol con dos o más vértices tiene al menos dos hojas.

14. Probar que el grafo complemento de un árbol es conexo o tiene un vértice aislado y el resto forma un subgrafo completo.

15. Probar que en cualquier grupo de personas siempre hay dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en el grupo.

16. ¿Es posible que exista un grupo de 7 personas tal que cada persona conozca exactamente a otras 3 personas del grupo?

17. Probar que un grafo de n vértices que tiene más de $(n-1)(n-2)/2$ aristas es conexo.

18. Probar que un grafo conexo G es euleriano si y sólo si toda componente biconexa de G es euleriana.

19. Probar o dar un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

    (i) El número de cliques de G es menor o igual a $\omega(G)$.

    (ii) El número de cliques de G es mayor o igual a $\omega(G)$.

20. ¿Cuál es el mayor número posible de puntos de corte en un grafo de n vértices?

21. Probar que un grafo cúbico tiene un punto de corte si y sólo si tiene un puente. ¿Es cierta esta afirmación si el grafo no es cúbico?

22. Probar que si un grafo cúbico tiene un puente, entonces tiene al menos 10 vértices.

23. Probar que si v es un punto de corte de G, entonces v no es un punto de corte de $\bar{G}$.

24. Probar que v es un punto de corte si y sólo si existe vértices u y w adyacentes a v tales que v está en todos los caminos entre u y w.

25. Probar que un grafo conexo con al menos dos aristas es biconexo si y sólo si todos los pares de aristas adyacentes pertenecen a un circuito.

26. Vialidad Nacional quiere construir, de la forma ms econmica posible, caminos que vinculen 5 ciudades (aunque para ir de una a otra haya que pasar por una tercera). Los costos de los tramos entre cada par de ciudades estn dados en la tabla. Decir qué tramos deberan construirse.

	B	C	D	E
A	5	10	80	90
B		70	60	50
C			8	20
D				10

27. Probar que si todas las aristas de un grafo G tienen distinto peso entonces G tiene un único árbol generador mínimo.

28. Sea T un árbol generador mínimo de un grafo G. Probar que T contiene todas las aristas de peso mínimo salvo que las mismas incluyan un circuito.

29. Si A es la matriz de adyacencia de un grafo y $k \geq 2$, ¿qué representan las entradas de la matriz A^k?

30. Sea G un grafo y sea A su matriz de adyacencia. Probar que G es bipartito si y sólo si para todo número natural impar k, la diagonal de A^k es nula.

31. Caracterizar la matriz de adyacencia de un grafo bipartito sin considerar las matrices A^k, para $k \geq 2$.

32. Se define la matriz R de alcance de un grafo como:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \text{ es alcanzable desde } v_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Cómo se puede calcular R a partir de la matriz de adyacencia?

33. Escribir un algoritmo para cada uno de los siguientes problemas. ¿Cuál es la complejidad de los algoritmos planteados?

   (i) Decidir si un grafo es conexo.
   (ii) Calcular el número de componentes conexas de un grafo.
   (iii) Decidir si un grafo tiene un circuito.
   (iv) Decidir si un grafo es bipartito.
   (v) Encontrar una clique en un grafo.
   (vi) Encontrar una clique máxima en un grafo.
   (vi) Decidir si dos grafos son isomorfos.

34. Implementar el tipo de datos Grafo utilizando matrices de adyacencia. Implementar funciones adecuadas de consulta y lectura desde archivos de texto.

35. Sobre la base de la implementación del punto anterior, implementar un algoritmo para encontrar todos los vértices que estén a distancia 3 de un vértice dado, utilizando para esto el recorrido BFS del grafo.

36. Implementar un algoritmo para determinar si un grafo es conexo.

37. Escribir e implementar un algoritmo para encontrar un camino de longitud mínima entre dos vértices dados.

Bibliografía

1. R. Ahuja, R. Magnanti y J. Orlin, *Network flows. Theory, algorithms and applications.* Prentice-Hall, 1993.

2. J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph theory with applications.* Macmillan Press, 1976.

3. G. Brassard y P. Bratley, *Fundamentals of Algorithmics.* Prentice-Hall, 1996.

4. J. Gross y J. Yellen, *Graph theory and its applications.* CRC Press, 1999.

5. F. Harary, *Graph theory.* Addison-Wesley, 1968.