Introducción a la teoría de grafos
Práctica 2: Problemas de camino mínimo

Contenidos

1. Introducción y aplicaciones. Revisión de conceptos de complejidad computacional. Camino mínimo en redes acíclicas. Algoritmo de Dijkstra. Algoritmos de corrección de etiquetas. Detección de circuitos negativos.

Ejercicios

1. El propietario de una casa de veraneo desea alquilar su casa durante el verano, y para esto ha solicitado que todos los interesados hagan sus ofertas. Cada oferta consiste de los siguientes datos: días de inicio y finalización del alquiler y monto ofrecido por el alquiler durante esos días. El propietario quiere saber a qué oferentes debe alquilar la casa de modo tal de maximizar sus ganancias totales. Formular este problema como un problema de camino mínimo en una red adecuada.

2. El *problema de distribución del cambio* consiste en determinar si podemos cambiar un billete de p pesos en monedas de denominaciones conocidas, de modo tal de entregar la menor cantidad total de monedas. Formular este problema como un problema de camino mínimo.

3. Consideremos un conjunto de n números reales $a_1, \dots, a_n$, ubicados en orden decreciente. Queremos particionar estos números en grupos de modo tal que

   (i) cada grupo contenga al menos p números,
   (ii) los números de cada grupo sean consecutivos en la lista $a_1, \dots, a_n$, y
   (iii) La suma de la varianza de cada grupo sea mínima.

   Formular este problema como un problema de camino mínimo.

4. En el *problema de la mochila* tenemos un conjunto de objetos, cada uno con su peso y su valor. El problema consiste en determinar cuáles de estos objetos se pueden poner en una mochila, de modo tal que el peso total de la mochila no exceda de P unidades y se maximice la suma de los valores de los objetos incluidos. Formular este problema como un problema de camino mínimo.

5. En el *problema de la mochila múltiple* podemos ubicar más de una copia de cada objeto, de modo tal que cada uno puede estar 0, 1, 2, ... veces en la mochila. Formular este problema como un problema de camino mínimo.

6. La siguiente tabla muestra los posibles horarios de guardia para los choferes de una compañía de ómnibus. Se quiere asegurar, al menor costo posible, que entre las 9 y las 17 hs. exista en todo momento al menos un chofer de guardia. Modelar y resolver este problema como un problema de camino mínimo.

Horario:	9-13	9-11	12-15	12-17	14-17	12-16	16-17
Costo:	30	18	21	38	20	22	9

7. Probar que si todos los arcos de una red tienen longitud 1, entonces el algoritmo de Dijkstra examina los vértices de la red en el mismo orden que el algoritmo BFS en digrafos. Concluir que, en este caso, el problema de camino mínimo se puede resolver en $O(m)$.

8. Construir un ejemplo de una red con algunos arcos de longitud negativa, y tal que el algoritmo de Dijkstra resuelva correctamente el problema de camino mínimo sobre esta red. Construir un ejemplo de una red en la que suceda lo contrario.

9. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas dando una demostración o construyendo un contraejemplo.

   (i) Si todos los arcos tienen costos distintos, entonces existe un único camino mínimo entre dos vértices fijos.

   (ii) Si todos los arcos tienen longitudes positivas y eliminamos la orientación de cada arco (es decir, construimos una red no dirigida), el camino mínimo entre dos vértices no cambia.

   (iii) Si todas las longitudes aumentan en k unidades, entonces el camino mínimo entre dos vértices aumenta en un mútiplo de k.

   (iv) Si todas las longitudes disminuyen en k unidades, entonces el camino mínimo entre dos vértices disminuye en un mútiplo de k.

   (v) El algoritmo de Dijkstra siempre encuentra un camino mínimo con la menor cantidad de arcos posible.

10. ¿Cómo se puede resolver el problema de camino mínimo si se admiten arcos paralelos en la red?

11. Sean s y t dos vértices en una red. Un *arco vital* es un arco cuya eliminación hace que la longitud del camino mínimo entre s y t aumente. Un *arco vital máximo* es un arco vital cuya eliminación genera el mayor aumento posible en la longitud del camino mínimo entre s y t. Supongamos que todas las distancias son positivas y que existe al menos un arco vital. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   (i) Un arco vital máximo es un arco con costo máximo.

   (ii) Un arco vital máximo es un arco con costo máximo en algún camino mínimo entre s y t.

   (iii) Un arco que no pertenece a ningún camino mínimo entre s y t no puede ser un arco vital máximo.

   (iv) Una red puede tener varios arcos vitales máximos.

12. Un *camino máximo* es un camino dirigido entre los vértices s y t con longitud máxima. Proponer un algoritmo $O(m)$ para encontrar un camino máximo en una red acíclica con costos no negativos. ¿Es este algoritmo correcto si la red contiene circuitos negativos?

13. (algoritmo A^*) Sea $h(i)$ una cota inferior de la longitud del camino mínimo desde el vértice s hasta el vértice i. Por ejemplo, si los vértices representan puntos en el plano, entonces podemos tomar $h(i)$ como la distancia euclídea entre s e i, y este valor es una cota inferior de la longitud del camino mínimo entre estos dos vértices.

(i) Sea $c_{ijh} = c_{ij} + h(j) - h(i)$ para todo arco ij. Mostrar que con estas nuevas longitudes los caminos mínimos en el grafo no cambian.

(ii) Si aplicamos el algoritmo de Dijkstra con c_{ijh} como longitudes de los arcos, el comportamiento empírico del algoritmo mejora. ¿A qué se debe este cambio?

(iii) ¿Qué sucede si la función h no cumple la condición de que $h(i) = h(j)+c_{ij}$? ¿Puede usarse este nuevo algoritmo en este caso?

Bibliografía

1. R. Ahuja, R. Magnanti y J. Orlin, *Network flows. Theory, algorithms and applications.* Prentice-Hall, 1993.

2. G. Brassard y P. Bratley, *Fundamentals of Algorithmics.* Prentice-Hall, 1996.

3. B. Korte y J. Vygen, *Combinatorial optimization: Theory and algorithms.* Springer-Verlag, 2000.