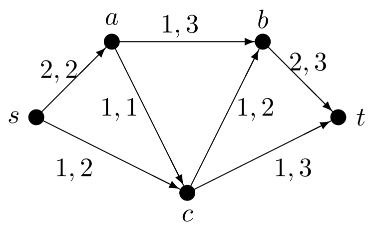
Introducción a la teoría de grafos
Práctica 3: Problemas de flujo máximo

Contenidos

1. Introducción y aplicaciones. Flujos y cortes en una red. Algoritmo genérico de caminos aumentantes. Teorema de flujo máximo y corte mínimo.

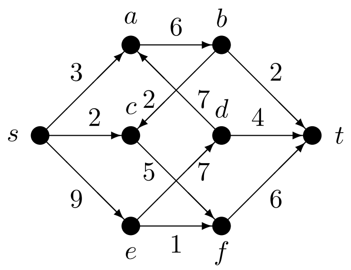
Ejercicios

1. Dada la red de la figura donde en cada arco figura la capacidad y el valor de un flujo dado:



   (a) Determinar todos los posibles caminos de aumento.
   (b) Construir a partir del flujo dado, el flujo máximo de s a t.
   (c) Encontrar un corte mínimo que separe a s de t. ¿Qué ocurre con el valor del flujo calculado en (b) en los arcos del corte mínimo?

2. Encontrar el flujo máximo que puede ir de s a t en la siguiente red:



3. Un agente de viajes debe arreglar el viaje de 10 turistas de Buenos Aires a Viena en una fecha dada sabiendo que hay 7 lugares libres de Buenos Aires a Río, 4 de Río a París, 8 de París a Viena, 2 de Buenos Aires a Viena, 5 de Buenos Aires a Madrid, 3 de Madrid a París y 2 de Madrid a Viena. ¿Se puede organizar el viaje?

4. Tenemos 5 comisiones asesoras, y cada una desea enviar un representante distinto a una reunión. Los miembros de la comisióm A son a, b y c, los miembros de B son b y c, los miembros de C son a, b y d, los de D son d, e, f y los de E son e y f. Transformar el problema en un modelo de flujo máximo y resolverlo.

5. Sea G un grafo conexo no orientado. Mostrar que existen k caminos que no tienen aristas en común entre s y t si y sólo si cualquier corte que separe s de t tiene al menos k arcos.

6. Sea G un grafo conexo no orientado. Mostrar que existen k caminos sin vértices en común si y sólo si cualquier conjunto de vértices que desconecta s de t tiene al menos k vértices.

7. ¿Cómo se puede calcular el número de caminos disjuntos en las aristas que se pueden trazar entre s y t? Idem para caminos sin vértices en común.

8. Pablo y Matilde se casan y quieren armar la mayor cantidad posible de parejas para la ceremonia de las ligas. Cada pareja estará formada por un amigo soltero de Pablo y una amiga soltera de Matilde, pero como son un poco casamenteros, quieren que las parejas sean "potencialmente compatibles". Transformar el problema en un problema de flujo máximo.

9. Decir si son correctas o no las siguientes afirmaciones. Justificar.

   (a) Si todos los arcos de una red tienen distintas capacidades existe un único corte de capacidad mínima.

   (b) Si todos los arcos en una red tienen distintas capacidades existe un único conjunto de arcos por el cual puede pasar un flujo de valor máximo.

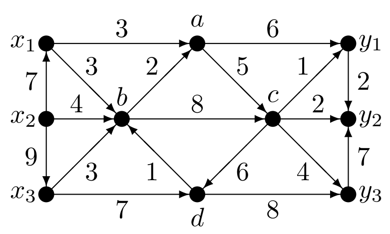
   (c) Si todos los arcos en una red tienen capacidad par, el valor de un flujo máximo es par.

   (d) Si todos los arcos en una red tienen capacidad impar, el valor de un flujo máximo es impar.

   (e) Si se incrementa en k unidades la capacidad de cada arco en una red, el valor del flujo máximo se incrementa en k unidades.

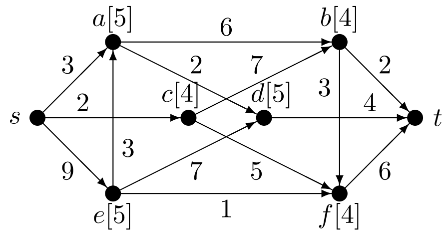
   (f) Si se multiplica por k la capacidad de cada arco en una red, el valor del flujo máximo se multiplica por k.

10. En la siguiente red x_1, x_2, x_3 son las fuentes de algún elemento. Se dispone de 5 unidades en x_1, 10 en x_2 y 5 en x_3. Se requieren 5 unidades en y_1, 10 en y_2, y 5 en y_3 y se desea saber si se pueden enviar a través de la red. (sugerencia: agregar una fuente s y un sumidero t artificiales a la red).



11. ¿Cómo se puede modificar el método de Ford y Fulkerson cuando se usan redes no orientadas para evitar que se pueda tener simultáneamente $f(v_i \to v_j) > 0$ y $f(v_j \to v_i) > 0$?

12. En la siguiente red además de las capacidades de los arcos, los vértices distintos de s y t tienen una cota superior de flujo que pueden pasar a través de ellos. Encontrar el flujo máximo en este caso. (Sugerencia: reemplazar cada vértice por dos vértices nuevos).



13. Dada una matriz y las sumas de cada fila y columna, se quiere redondear las entradas no enteras hacia arriba o hacia abajo, de manera que las nuevas sumas de cada fila y columna correspondan a algún redondeo de las sumas originales.
Ej:

1.2	2.3	1.8	5.3
2.5	3.6	1	7.1
3.7	5.9	2.8	

$\rightarrow$

2	2	1	5
2	4	1	7
4	6	2	

Modelar como un problema de flujo.

Bibliografía

1. R. Ahuja, R. Magnanti y J. Orlin, *Network flows. Theory, algorithms and applications.* Prentice-Hall, 1993.

2. B. Korte y J. Vygen, *Combinatorial optimization: Theory and algorithms.* Springer-Verlag, 2000.